Gintautas Bareikis

Aukštoji matematika.

Algebros ir analizinės geometrijos pagrindai

Paskaitų ciklas (2+2) skirtas ekonomikos bei verslo vadybos specialybių studentams. Klausantys šį paskaitų ciklą bus supažindinti su tiesinės algebros bei analizinės geometrijos pagrindais, kurie būtini sėkmingoms tolimesnėms studijoms.

Turinys

I. ĮVADAS
1.1 Logikos sąvokos 4
1.2 Sakiniai su kintamaisiais 6
1.2 Aibių algebros sąvokos 7
Uždaviniai 9

II. TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS
2.1 Tiesinių lygčių sistemos. Elementarieji pertvarkiai 13
2.2 Gauso algoritmas. Tiesinių lygčių sistemų suderinamumas 16
2.3 Gauso-Žordano metodas 24
Uždaviniai 29

III. VEKTORINĖ ERDVĖ $\mathcal{R}^n$
3.1 Vektoriai. Vektorių veiksmai 35
3.2 Vektorių tiesinė priklausomybė 37
3.3 Erdvės $\mathcal{R}^n$ bazė 42
3.4 Vektorių rinkinio rangas 46
3.5 Vektorių rinkinio elementarieji pertvarkiai 47
3.6 Vektorių ir tiesinių lygčių sistemų ryšys 49
3.7 Tiesinių lygčių sistemų suderinamumo sąlygos 55
Uždaviniai 59

IV. **KVADRATINĖS MATRICOS. KVADRATINIŲ MATRICŲ DETERMINANTAI**
4.1 Matricos 62
4.2 Matricų veiksmai 63
4.3 Kvadratinių matricų determinantai 68
4.4 Atvirkštinė matrica. Kramerio metodas 71
4.5 Matricinės algebros taikymai. Leontjevo modelis 76
4.6 Kiti taikymai. Tiesinės nelygybės. Mažiausių kvadratų metodas 80
Uždaviniai 86

V. VEKTORIAI. DEKARTO KOORDINAČIŲ SISTEMA
5.1 Skaliarinė sandauga erdvėje $\mathcal{R}^n$ 98
5.2 Geometriniai vektoriai. Veiksmų savybės 98

VI. TIESĖS LYGTIS PLOKŠTUMOJE. PLOKŠTUMOS LYGTIS. TIESĖ ERDVĖJE
6.1 Tiesės lygtis plokštumoje 105
6.2 Tiesių tarpusavio padėtis 108
6.3 Plokštumos lygtis 109
6.4 Tiesė erdvėje 111

VII. ANTROS EILĖS KREIVĖS
7.1 Antros eilės kreivių lygtys 114
Uždaviniai 120

ĮVADAS

1.1 Logikos bei aibių teorijos sąvokos

Aibe vadinsime, bet kokį objektų rinkinį. Objektai sudarantys minėtąjį rinkinį vadinami aibės *elementais*. Ateityje aibes žymėsime didžiosiomis lotyniškosios abėcėlės raidėmis, o jos elementus mažosiomis. Taisyklę, kuria vienos aibės elementui priskiriamas vienas kitos (arba tos pačios) aibės elementas, vadinsime *funkcija*.

Matematikos tyrimo objektas - *teiginiai*, t.y. sakiniai, kurie yra teisingi arba klaidingi. Priminsime, kad pradiniai, apriori (iš anksto) teisingi teiginiai, vadinami *aksiomomis* arba elementariaisiais teiginiais. Teiginių aibėje apibrėžkime operacijas, kurių atžvilgiu ši aibė būtų uždara. Kitaip tariant, atlikdami veiksmus su teiginiais gausime teiginį, kurį vadinsime *sudėtiniu teiginiu* arba *logine forma.*

Teiginių veiksmai

1.*Neigimo operacija. Tarkime duotas teiginys p. Tuomet sakinį ne p (žymėsime* $\overline{p}$*), vadinsime duotojo teiginio p neiginiu. Jo teisingumo reikšmė priešinga teiginio p teisingumo reikšmei.* Pavyzdžiui paneigę teiginį 'yra natūralusis skaičius mažesnis už 0' gausime, 'nėra natūraliojo skaičiaus mažesnio už 0'.

2.*Teiginių disjunkcija. Sakinį ' p arba q ' vadinsime teiginių p, q disjunkcija, (žymėsime* $p \vee q$*). Šis sakinys laikomas klaidingu tuo atveju, kai abu teiginiai* p, q *yra klaidingi.* Taigi, likusiais atvejais teiginys bus teisingas. Teiginys 'yra žalios spalvos automobilių' arba ' nėra žalios spalvos automobilų' yra teisingas. Šis veiksmas kartais vadinamas logine sudėtimi.

3.*Teiginių konjunkcija. Sakinį 'p ir q ' vadinsime šių teiginių konjunkcija (žymėsime* $p \wedge q$ *). Šis sakinys laikomas teisingu tuo atveju, kai abu teiginiai* p, q *teisingi.* Vadinasi teiginys 'duotojo trikampio kampų suma ne didesnė už 180 laipsnių' ir 'duotojo trikampio kampų suma didesnė už 180 laipsnių'- neteisingas. Ši loginė operacija kartais dar vadinama logine daugyba.

4.*Teiginių implikacija. Sakinį 'jei p tai q ' vadinsime šių teiginių implikacija (žymėsime* $p \Rightarrow q$ *). Šis sakinys laikomas klaidingu tik tuo atveju, kai p teisingas, o q klaidingas.* Vadinasi teiginys, jei 'lygiakraščio trikampio kraštinės nelygios,' tai 'lygiakraščio trikampio kampai nelygūs' yra teisingas, nes abu teiginiai klaidingi. Teiginys 'p' yra vadinamas prielaida, o 'q' išvada.

5. *Teiginių ekvivalencija. Sakinį 'p tada ir tik tada kai q ' vadinsime šių teiginių ekvivalencija. Šis sakinys laikomas teisingu tuo atveju, kai abiejų teiginių teisingumo reikšmės sutampa.* Šią operaciją žymėsime $p \Leftrightarrow q$. Kartais šis teiginys dar vadinamas logine lygybe. Pateiksime pavyzdį. Sakykime, kad teiginys q nusakytas sakiniu 'trikampis yra statusis', o teiginys p nusakomas sakiniu 'trikampio įžambinės kvadratas lygus statinių kvadratų sumai'. Tuomet teiginys '$p \Leftrightarrow q-$ ' skaitytojui gerai žinoma Pitagoro teorema.

Naudojant šias logines operacijas, galime sukonstruoti sudėtinius teiginius. Aukščiau apibrėžtos operacijos vadinamos paprasčiausiomis loginėmis formomis. Reiškinius, sudarytus baigtinį skaičių kartų atlikus logines operacijas tarp teiginių, nurodydami jų atlikimo tvarką skliaustų pagalba, gausime sudėtinius teiginius, kuriuos vadinsime loginėmis formomis. Teiginys

$$\overline{((p \Rightarrow q) \wedge (p \vee r))}$$

- loginė forma priklausanti nuo teiginių p, q, r. 'Jei $\underline{studentai\, geria\, daug\, alaus}$ ir $\underline{nesimoko}$, tai $\underline{jie\, prastai\, mokosi}$ arba $\underline{nebaigia\, universiteto}$'- tai neformalizuota loginė forma. Pabrauktus teiginius pažymėję p, q, r, s atitinkamai galime formalizuoti šį teiginį tokiu būdu: $'(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee s)'$.

Dvi logines formas $\alpha(p_1, \ldots p_n)$ ir $\beta(p_1, \ldots p_n)$, kurių teisingumo reikšmės sutampa, esant bet kokiam teiginių $p_1, \ldots, p_n$ teisingumo reikšmių rinkiniui, vadinsime logiškai ekvivalenčiomis ir žymėsime

$$\alpha(p_1, \ldots, p_n) \equiv \beta(p_1, \ldots, p_n).$$

Loginę formą, kurios teisingumo reikšmė visuomet lygi 1 vadinsime tautologija. Paprastai tautologija žymima raide I. Jeigu loginės formos reikšmė visuomet lygi nuliui, tai ši forma vadinama loginiu nuliu. Ją žymime raide O.

Tautologija yra vadinama logikos dėsniu. Pateiksime keletą logikos dėsnių.

1. Dvigubo neigimo dėsnis: $(\overline{\overline{p}} \equiv p) \equiv I$.
2. Negalimo trečiojo dėsnis: $(p \vee \overline{p}) \equiv I$.
3. Prieštaravimo dėsnis: $(p \wedge \overline{p} \equiv O) \equiv I$.
4. Kontrapozicijos dėsnis: $((p \Rightarrow q) \equiv (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}))$.
5. Silogizmo dėsnis: $(((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \equiv I$.
6. de Morgano dėsniai:

$$\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}, \; \overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}.$$

Be to

$$7. \quad \overline{p \Rightarrow q} \equiv p \wedge \overline{q}.$$

$$8. \quad \overline{p \Leftrightarrow q} \equiv \overline{p} \Leftrightarrow q.$$

9. Teisingos išvados dėsnis: jei žinoma, kad teiginys $p \Rightarrow q$ ir sąlyga p yra teisingi teiginiai, tai tuomet išvada irgi teisinga.

10. Klaidingos išvados dėsnis: jeigu teiginys $p \Rightarrow q$ yra teisingas, o jos išvada q yra klaidingas teiginys, tai sąlyga p yra klaidingas teiginys.

Nuovokesnis skaitytojas tikimės akreipė dėmesį į tai, kad kalba mokslinė netgi ir buitinė, bus neprieštaringa, jei bus laikomasi šių dėsnių. Juk ne kartą esame susidūrę su pašnekovu, kuris kalba nesilaikydamas logikos taisyklių. Tokia kalba taip pat turi privalumų - neįmanoma nustatyti tiesos.

Tolimesnėje veikloje mums teks susidurti su dvejopo pobūdžio teiginiais. Vienus teiginius mes laikysime apriori teisingais, juos vadinsime aksiomomis, o teiginius, kurių teisingumą nustatysime samprotaudami, naudodami logikos dėsnius bei aksiomas, vadinsime teoremomis. Aksiomos, tai pirminiai teiginiai, kurių pagrindu kuriama matematinė teorija. Dar kartą pabrėžiame, kad dėl aksiomų teisingumo yra susitariama, skirtingose teorijose ta pati aksioma gali turėti skirtingas teisingumo reikšmes. Teorema vadinsime teiginį $p \Rightarrow q$. Pradinę teoremą paprastai vadiname tiesiogine. Tuomet teoremą $q \Rightarrow p$ vadinsime atvirkštine pradinei. Teoremą $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}-$ priešinga pradinei teoremai, o teoremą $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ priešinga atvirkštinei teoremai. Pasirodo, kad kai kurios iš šių teoremų yra ekvivalenčios. Pavyzdžiui teisinga tokia

1 **Teorema** *Tiesioginė ir priešinga atvirkštinei teoremos yra ekvivalenčios, t.y.*

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}).$$

Atkreipsime skaitytojo dėmesį, kad tai yra kontrapozicijos dėsnis!

1 **Teorema** *Atvirkštinė ir priešingoji teoremos yra ekvivalenčios.*

Šių teoremų įrodymą paliekame skaitytojui. Įrodymui naudokite teisingumo lenteles.

Tarkime, kad teiginys p skamba taip: *'trikampis yra status'* , o teiginys q : *'trikampio įžambinės kvadratas lygus statinių kvadratų sumai'*. Tada teiginys $(p \Leftrightarrow q)$ - skaitytojui gerai žinoma, Pitagoro teorema.

Teiginį $p \Leftrightarrow q$ vadinsime teorema su būtinomis ir pakankamomis sąlygomis.

1.2 Sakiniai su kintamaisiais (predikatai)

Apibrėžimas *Sakinį, kuriame yra neapibrėžtos sąvokos (kintamieji) ir kuris tampa teiginiu šias sąvokas (kintamuosius) apibrėžus, vadinsime predikatu.* Jei sakinyje yra n nežinomųjų, tai šis predikatas vadinamas $n-$ viečiu. $n-$ vietį predikatą žymėsime $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Tarkime, kad predikatas vienvietis. Pastebėsime, kad kitu atveju, visos sąvokos būtų analogiškos, tik žymėjimai taptų sudėtingesni. Pavyzdžiui, sakinys $P(x)$: $x < 2$ yra predikatas, o sakinys $P(3)$; $3 < 2$ jau yra teiginys, beje neteisingas. Sakinys $P(x)$: "natūralusis skaičius x dalo skaičių 7" yra predikatas, kadangi x nežinomas. Tačiau sakinys "egzistuoja x natūraliųjų skaičių aibėje, kuris dalo skaičių 7"" jau yra teiginys, beje teisingas. Arba sakinys "visi natūralieji skaičiai x, dalo skaičių 7"" yra teiginys. Šis teiginys yra neteisingas. Sakinius "*egzistuoja x, tenkinantis savybę P*" ir "*visi x tenkina savybę P*" vadinsime sakiniais su egzistavimo ir visuotinumo kvantoriais. Šiuos sakinius trumpai rašysime, atitinkamai, $(\exists x, P(x))$, $(\forall x, P(x))$. Simboliai $\exists$ ir $\forall$ vadinami egzistavimo ir visuotinumo kvantoriais, atitinkamai. Naudodami kvantorius, predikatus paverčiame teiginiais, kadangi šiuo atveju kintamieji dydžiai yra susiejami su tam tikru požymiu ir nežinomas dydis konkretizuojamas.

Pavyzdys Duotas teiginys "kiekvienas studentas esantis šioje grupėje studijuoja algebros kursą." Užrašykime šį teiginį naudodami kvantorius.

Tegu predikatas $P(x)$: "šios grupės x (nežinomas) studentas studijuoja algebros kursą"

Tada pateiktą teiginį galime užrašyti tokiu būdu: $\forall x, P(x)$.

Antra vertus teiginys: $\exists x P(x)$ yra suprantamas tokiu būdu: "grupėje yra studentas, kuris studijuoja algebros kursą."

Teiginį "aibėje $A = [-2, 5] \subset \mathcal{R}$ yra skaičius, kurio modulis didesnis už 4" formalizuosime tokiu būdu: $\exists a \in A |a| > 4$. Pastebėsime, kad šis teiginys yra teisingas.

Pavyzdys Tegu predikatas $P(x)$: "$x + 1 > x$." Kokios šio predikato teisingumo reikšmės. Akivaizdu, kad šis predikatas $\forall x, P(x)$ yra teisingas, jei x realus skaičius.

Pavyzdys Tegu predikatas $P(x)$: "$x > 4$." Kokios šio predikato teisingumo reikšmės. Akivaizdu, kad šis predikatas $\forall x P(x)$ nėra teisingas, jei x realus skaičius. Tačiau egzistuoja realiųjų skaičių intervalus kuomet šis predikatas teisingas. Būtent: $\forall x \in (4,\infty)P(x)$ jis yra teisingas.

Kintamųjų reikšmių aibę, su kuriomis predikatas tampa teiginiu, vadinsime *predikato apibrėžimo sritimi*, o kartais sakoma predikato *universumu*. Predikato apibrėžimo srities elementai, su kuriais predikatas tampa teisingu teiginiu, vadinami *predikato teisingumo aibe*.

Paskutiniame aukščiau pateiktame pavyzdyje matome, kad predikato apibrėžimo sritimi gali būti bet kokie realūs skaičiai, o šio predikato teisingumo aibę sudaro intervalas $(4,\infty)$.

1.2 Aibių algebros sąvokos

Kaip jau esame minėję, aibe vadiname bet kokį objektų rinkinį, o objektus sudarančius aibę vadiname jos elementais. Sakinį, *a yra aibės A elementas* trumpinsime tokiu būdu: $a \in A$. Jeigu elemento b nėra aibėje B tai pastarąjį sakinį trumpai rašysime $b \notin B$. Simboliniu užrašu $\forall x \in A \ldots$ žymėsime sakinį, kad visi aibės A elementai turi savybę nurodytą daugtaškio vietoje, o simbolinis užrašas $\exists x \in A \ldots$ reiškia sakinį, kad yra aibėje A bent vienas elementas turintis savybę, nurodytą daugtaškio vietoje. Tarkime, kad daugtaškio vietoje nurodyta kokia nors sąlyga (sakinys su kintamuoju) $P(x)$. Pažymėkime S_1 teiginį '$\forall x \in A, P(x)$ '. Tada $\overline{S_1}$ reiškia tokį teiginį $\exists x \in A, \overline{P(x)}$ ir atvirkščiai, jeigu S_2 yra teiginys $\exists x \in A, P(x)$, tai $\overline{S_2}$ reiškia teiginį $\forall x \in A, \overline{P(x)}$.

Naudodamiesi aukščiau pateiktais žymėjimais aibę galime užrašyti tokiu būdu: $A = \{x; x \in A\}$. Aibę turinčią vieną elementą žymime $A = \{a\}$. Aibę $\{x, x \neq x\}$ vadinsime tuščia. Ją žymėsime simboliu $\emptyset$. Sakysime, kad aibė A yra aibės B *poaibis* (žymėsime $A \subset B$), jeigu $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$. Sakysime, kad aibės A, B yra *lygios* ($A = B$), jeigu $A \subset B$ ir $B \subset A$. Aibių A ir B sankirta (žymėsime $A \cap B$) vadinsime aibę $\{x, x \in A \wedge x \in B\}$. Aibę $D = \{x, x \in A \vee x \in B\}$ vadinsime aibių *sąjunga*, kurią žymėsime $A \cup B$. Sakysime, kad aibės nesikerta, jeigu jų sankirta sutampa su tuščia aibe. Aibių A ir B skirtumu, kurią žymėsime $A \setminus B$, vadinsime aibę $A \setminus B = \{x, x \in A \wedge x \notin B\}$. Tarkime, kad visos nagrinėjamos aibės yra kokios nors aibės poaibiai. Šią aibę vadinsime *universalia*, ir žymėsime I. Aibės A papildiniu, kurią žymėsime $\overline{A}$, vadinsime aibę $\overline{A} = \{x \in I, x \notin A\}$. Tarkime, kad A, B kokios tai aibės. Tada šios aibės poaibių visumą $\mathcal{A}$ vadinsime *klase*.

Kai kurios svarbesnės aibių veiksmų savybės:

1. $B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$.
2. $\overline{\overline{A}} = A$.
3. $A \cap B = B \cap A$ ir $A \cup B = B \cup A$.
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Beje, paskutiniosios dvi formulės vadinamos de Morgano formulėmis, analogiškai kaip ir logikos algebroje. Pastarąsias lygybes siūlome skaitytojui įrodyti pačiam.

Pastebėsime, kad dažnai literatūroje aibės A papildinys žymimas simboliu A^c.

Prieš pradėdami kitą skyrių neatsispyrėme pagundai priminti, o gal kai ką ir supažindinti, su matematinės indukcijos metodu, kurį gana dažnai tenka naudoti įrodant įvairius teiginius. Bet, norint giliau suprasti matematinės indukcijos metodo esmę, teks susipažinti su natūraliųjų skaičių aibės apibrėžimu.

Natūraliųjų skaičių aibės sąvoka viena svarbiausių matematikoje. Nors natūralaus skaičiaus sąvoka labai sena, bet šio skaičiaus 'buveinės' sąvoka buvo suformuluota tik 19 am. pabaigoje G. Peano bei R. Dedekindo pastangų dėka.

Taisyklę, siejančią du bet kokius tos pat aibės elementus, vadinsime binariniu sąryšiu. Pavyzdžiui, sveikųjų skaičių aibėje galime nurodyti skaitytojui gerai žinomą binarinį sąryšį 'mažiau' arba dalumo sąryšį toje pat aibėje. Žinoma, binariniai sąryšiai sieja nebūtinai visus nagrinėjamos aibės elementus. Siūlome skaitytojui pačiam pateikti daugiau binarinio sąryšio pavyzdžių kitose aibėse.

Dabar jau esame pasiruošę aksiomatiškai apibrėžti natūraliųjų skaičių aibę. Tarkime, kad kokioje nors aibėje apibrėžtas sąryšis "eina tiesiog po ", kurį simboliškai žymėsime " $\prec$ ".

Aibę $\mathcal{N}$ vadinsime natūraliųjų skaičių aibe, jeigu joje apibrėžtas binarinis sąryšis "eina tiesiog po" siejantis kai kuriuos šios aibės elementus, turintis savybes:

a1. Yra šioje aibėje elementas, pažymėkime jį '1', neinantis po jokio elemento;

a2. Po kiekvieno elemento eina vienas ir tik vienas elementas;

a3. Kiekvienas elementas eina ne daugiau kaip po vieno elemento;

a4. Bet kuris aibės $\mathcal{N}$ poaibis M, turintis savybes:

1) $1 \in M$,

2) jei elementas $m \in M$, tai ir elementas m' einantis tiesiog po jo $m \prec m'$ priklauso aibei M, sutampa su aibe $\mathcal{N}$.

Šios aibės elementus vadinsime natūraliaisiais skaičiais. Naudojant šias aksiomas galime "surėdyti" eilės tvarka visus natūraliuosius skaičius. Einantį tiesiog po 1 pažymėsime 2, einantį tiesiog po 2 pažymėsime 3 ir t. t.

Aibė vadinama begaline, jeigu ji turi poaibį, skirtingą nuo jos pačios, kuriame yra tiek pat elementų kaip ir pradinėje aibėje. Priešingu atveju aibė yra baigtinė. Parodykime, kad natūraliųjų skaičių aibė begalinė. Tarkime, kad poaibį $S \subset \mathcal{N}$ sudaro visi lyginiai natūralieji skaičiai. Aišku, kad $S \neq \mathcal{N}$. Apibrėžkime taisyklę tokiu būdu: kiekvienam natūraliąjam skaičiui n priskirkime poaibio S elementą $2n$. Aišku, kad visiems natūraliesiems skaičiams "pakaks" aibės S elementų. Nesunku sukonstruoti ir atvirkščią priskyrimą, t.y. kiekvienam lyginiam skaičiui priskirkime natūralųjį. Taigi, remdamiesi aibių lygybės apibrėžimu gauname, kad aibėje ir jos poaibyje tiek pat elementų. Vadinasi aibė $\mathcal{N}$yra begalinė. Pastebėsime, kad ne visos begalinės aibės yra vienodos, t.y. yra palyginamos pavyzdžiui su natūraliųjų skaičių aibe. Jei skaitytojas tuo susidomėtų, siūlome kreiptis į dėstytoją, kuris suteiks platesnę informaciją apie tai.

Tolimesnei mūsų veiklai labai svarbi a4. aksioma, kuri dar vadinama matematinės indukcijos aksioma. Kuo pastaroji indukcija skiriasi nuo "kitokios" indukcijos. Apskritai kalbant, indukcija yra metodas, kurio dėka remiantis atskirais rezultatais daromi apibendrinti tvirtinimai. Bet "sveikas protas " mums kužda, kad kažin ar atlikus tik baigtinį kokio nors proceso stebėjimą galime neabejodami tvirtinti, kad ir neribotai tęsdami šio proceso stebėjimą gausime tą patį rezultatą? Dar daugiau, mokslo istorijoje daug pavyzdžių, kurie patvirtina, kad ne visada galime apibendrinti rezultatus remdamiesi tik baigtiniais stebėjimais. Pvz. P. Ferma patikrinęs, jog skaičius $2^{2^n}+1$ yra pirminis, kai $n = 0, 1, 2, 3, 4$, padarė prielaidą, kad šis skaičius kai $n = 5$ taip pat pirminis. Bet jo prielaida nepasitvirtino. Žinoma, pilnosios indukcijos metodu yra gaunamos patikimos žinios, tačiau ji įmanoma tik tuo atveju, kai nagrinėjama aibė baigtinė. Tad kyla klausimas, o kuo gi geresnis matematinės indukcijos metodas? Tarkime, kad mums reikia patikrinti, jog tam tikras reiškinys teisingas begaliniam skaičiavimo, vertinimo ir t.t. žingsnių skaičiui. Jeigu parodysime, kad šis žingsnių skaičius sutampa su natūraliųjų skaičių aibe, tai mūsų teiginys bus įrodytas. Tad kaip mes elgiamės. Visų pirma sutapatinkime mūsų nagrinėjamo proceso žingsnių skaičių aibę su aibe M, kuri figūravo aksiomoje a4. Tuomet mums tereikia patikrinti, ar po pirmojo žingsnio mūsų nagrinėjamas reiškinys tenkina keliamus reikalavimus. Tarkime kad pradinis reikalavimas išpildytas. Tuomet padarę prielaidą, kad nagrinėjamas reiškinys tenkina reikalavimus kokiame nors žingsnyje k (poaibiui M priklauso elementas k) mes įsitikiname, kad tuos pat reikalavimus reiškinys tenkina ir sekančiame žingsnyje (po k tiesiog einantis elementas irgi priklauso aibei M), tada naudodamiesi a4 aksioma gauname, kad žingsnių skaičius, kuriems nagrinėjamas reiškinys tenkina reikalavimus, sutampa su natūraliųjų skaičių aibe. Kitaip tariant, visiems žingsniams teiginys teisingas.

Tuo ir baigiame įvadinės dalies pastabas.

Uždaviniai

1. Kokios teiginių $p \vee q,\ p \wedge q,\ p \Rightarrow r, ((p \Rightarrow q) \wedge r) \vee q$ teisingumo reikšmės, jeigu $p;\ 2 \times 2 = 6,\ q;\ 2 \times 4 = 8,\ r;\ 3 - 1 = 2.$

2. Kurie iš pateiktų sakinių yra teiginiai. Nurodykite teiginių teisingumo reikšmes:
a) "šiandien lyja lietus"
b) "atsakyk į pateiktą klausimą"
c) "$3 < 5 - 1$"
d) "$a + b = 3.$"

3. Nustatykite, kurie iš pateiktų teiginių teisingi, o kurie klaidingi:
a) Jei $1 < 2$, tai $3 > 5$;
b) Jei $3 < 2$, tai $3 > 5$;
c) Jei "kiaulės moka skraidyti," tai $3 > 5$.

4. Kanibalai pasigavo tyrinėtoją ir nusprendė jį suvalgyti. Tačiau prieš atliekant šį ritualą jie nusprendė suteikti šansą išsigelbėti. Kanibalų genties moterys visuomet sako tiesą, o vyrai visuomet meluoja. Tyrinėtojas to nežino. Jam bus suteikta laisvė, jei pateikęs vieną klausimą jis nustatys, kurie meluoja, o kurie sako tiesą. Koks tai klausimas.

5. Paneikite duotą teiginį: "jei šiandien lis lietus ir nebus paskaitų, tai eisime į parodą ir žiūrėsime paveikslus arba dirbsime skaitykloje."

6. Patikrinkite, ar pateiktos loginės formos yra dėsniai (tautologios):

$$1)\quad \big((p \Rightarrow (q \wedge r)) \Leftrightarrow \big((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)\big)\big)$$

$$2)\quad \big((p \Rightarrow q) \Rightarrow r\big) \Rightarrow \big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big)$$

7. Paneikite duotuosius teiginius: "Visi aibės elementai neigiami", "yra sąžiningų teisininkų", ("Trikampio kraštinės lygios" arba "trikampio kampai lygūs"), Jei "$a < b$" tai "$a^2 < b^2$" arba $a \geq b$ ir $b = c$.

8. Sudarykite loginės formos teisingumo lentelę:

$$\overline{(}(p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \wedge r)) \vee (q \Leftrightarrow r).$$

9. Duota teorema: Tegu a, b, c realūs skaičiai.*Jei* $a < b$ *tai* $a + c < b + c$. Užrašykite šiai teoremai atvirkštinę, priešingą, priešingą atvirkštinei.

10. Įrodykite, kad tiesioginė bei priešinga atvirkštinei teoremos yra ekvivalentūs teiginiai.

11. Sudarykite nurodytų loginių formų teisingumo lenteles:
1) $\overline{p \wedge q} \vee r$
2)$\overline{(p \Rightarrow q)} \wedge (q \Rightarrow p)$
3) $(p \Rightarrow \overline{(q \vee r)}) \wedge (p \Leftrightarrow q)$
4) $(p \wedge \overline{q}) \Rightarrow r$
5) $p \Leftrightarrow (q \vee \overline{r})$
Paneikite visas šias logines formas.

12. Sudarykite loginių formų teisingumo lenteles. Nustatykite, ar pateiktos loginės formos L_1 ir L_2 yra logiškai ekvivalenčios:

$$L_1 := \overline{p \Rightarrow r}, \;\; L_2 := \overline{p} \Rightarrow \overline{r};$$

$$L_1 := (p \wedge r) \Rightarrow s, \;\; L_2 := (\overline{p} \vee \overline{r}) \Rightarrow \overline{s}.$$

$$L_1 := (p \Rightarrow q) \Rightarrow r, \;\; L_2 := p \Rightarrow (q \Rightarrow r).$$

13. Tarkime, kad
p : "Kelyje važiuojate 150 km/h greičiu;"
q : " policija skirs baudą";
r : "padarysite avariją".

Užrašykite lietuviškais sakiniais, suderinus linksnius ir prasmę, pateiktas logines formas:
a) $p \Rightarrow q$, *b*) $(p \wedge q) \Rightarrow r$, *a*) $(p \wedge r) \Leftrightarrow q)$.

14. Remdamiesi teisingumo lentelėmis, kad pateiktos loginės formos yra tautologijos:
a) $(\overline{p} \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \overline{q}$;
b) $(\overline{q} \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \overline{p}$;

15. Formalizuokite, po to paneikite bei deformalizuokite pateiktus sakinius:
a) Jei šiandien atliksime darbus ir laiku sugrįšime namo, tai arba žiūrėsime futbolo rungtynes arba ruošimės rytdienos kontroliniam darbui;

b) Pas draugus eisite tik tada, kai atliksite namų darbus, namų ruošos darbus arba nueisite pas senelę ir padėsite jei nukeliauti į parduotuvę;

c) Rytoj bus šalta ir lis lietus ir jei vyks futbolo rungtynės, tai teks pasiimti skėtį ir šiltai apsirengti.

16. Tegu $f(x), g(x)$ yra tolydžios funkcijos. Tada:
"Jei $\exists x \in (a,b); f(x)+g(x)=0$, tai $\exists x \in [a,b]; f(x)=0$ ir $g(x)=0$ arba $f(x) = -g(x)$;"
Suformuluokite šiai teoremai priešingą, atvirkštinę, priešingą atvirkštinei teoremas, paneikite šią teoremą (tarkime priešingai);

14. Užrašykite duotai teoremai priešingą, atvirkštinę, atvirkštinę priešingai teoremas bei nurodykite šių teoremų teisingumo reikšmes, jei:

a) Jei vektorių rinkinys yra tiesiškai priklausomas, tai bet kokį šio rinkinio vektorių galima užrašyti netrivialiu šio vektorių rinkinio tiesiniu dariniu;

b) Jei funkcija tolydi atvirame intervale, tai šiame intervale ji turi išvestinę;

c) Jei aibė begalinė, tai ji ekvivalenti kokiam nors savo poaibiui;

d) Jei funkcija tolydi uždarame intervale, tai šiame intervale ji įgyja didžiausią ir mažiausią reikšmes.

17. Tarkime, kad universali aibė $I = [-30, 30]-$ yra realiųjų skaičių intervalas. Sakykime, kad $A = \{-5, 2, 6, 15\}$, $B = (-5, 15)-$ realiųjų skaičių intervalas, $C = \{2, 3, 6\} \vee (7, 11]$.

a) Raskite šių aibių papildinius.

b) Raskite aibes: $(A \cap B)^c, (C^c \cup B) \setminus A, A \cap C$.

18. Nurodykite pateiktų aibių elementus:

a) $\{x \in \mathcal{R}, x^2 = 1.\}$;

b) $\{x \in \mathcal{N}, x < 12.\}$;

c) $\{x \in \mathcal{Z}, x^2 < 100.\}$

d) $\{x \in \mathcal{Z}, x^2 < \sqrt{2}.\}$

19. Nurodykite aibę, kuriai priklauso elementas 2 :

a) $\{x \in \mathcal{R}, x > 1\}$;

b) $\{x \in \mathcal{Z}, x^2 < 5\}$;

c) $\{2, \{2\}\}$;

d) $\{\{2\}, \{\{2\}\}\}$.

20. Nurodykite kiek elementų turi pateiktos aibės:

a) $\emptyset$

b) $\{\emptyset\}$

c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Nurodykite mažiausią aibę, kurios poaibiai yra šios trys aibės.

21. Tegu $A = \{a, b, c, d, e\}$ ir $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

b) Nurodykite pateiktų aibių elementus: $(A \cap B)^c, (C^c \cup B) \setminus A, A \cap C$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B, =;$ $B \setminus A$.

22. Apibrėžkite aibę, kurios elementai sveikiesi skaičiai, kurie dalosi iš m su liekana r.

23. Tarkime, kad universali aibė $I = [-30, 30]-$ yra realiųjų skaičių intervalas. Sakykime, kad $A = \{-2, 6, 10\}$, $B = (-5, 15)-$ realiųjų skaičių intervalas, $C = \{2, 3, 6\} \vee (7, 11]$.

a) Raskite šių aibių papildinius.

b) Nurodykite pateiktų aibių elementus: $(A \cap B)^c, (C^c \cup B) \setminus A, A \cap C$.

24. Tarkime, kad aibę A sudaro visi keturkampiai, turintys du stačius kampus, aibę B- visi stačiakampiai, aibę C- visos trapecijos, aibę D- visi lygiagretainiai, aibę $E-$ visi daugiakampiai, aibę $F-$ visi trikampiai. Atlikite visų įmanomų porų sąjungos, sankirtos bei skirtumo operacijas. Raskite visų šių aibių papildinius, jei laikysime, kad universali aibė- tai visi daugiakampiai, kurių kampų skaičius ne didesnis už keturis.

25. Raskite aibės $\{a, b, 1, 2\}$ visus poaibius. Tarkime, kad aibėje yra n elementų. Kiek skirtingų poaibių galima sudaryti iš minėtos aibės elementų?

26. Atlikite aibių

$$A = \{x; x^2 + 9x - 10 \leq 0\},\ B = \{x; |x| - |-2 + x| > 0\},\ C = \{x; x^2 - 3|x| + 2 > 0\}$$

veiksmus: $A \cap B,\ A^c \setminus (B \cap C),\ (B^c \cap A^c) \setminus C$.

27. Raskite aibes $A \times B,\ A \times C,\ (B \times C) \setminus (A \times C)$. Pavaizduokite šių aibių veiksmus plokštumoje, jei aibės A, B, C apibrėžtos 9. užduotyje.

28. Užrašykite nelygybių

$$x^2 - 9 \leq 0,\ \ |x| - 2 > 0,\ \ x^2 - 3|x| + 2 > 0$$

sprendinių aibių sankirtą ir sąjungą. Koks trečiosios nelygybės sprendinių aibės papildinys?

29. Ar teisingi teiginiai: Jei $A \setminus B = \emptyset$ tai $A \subset B$. Jei $A \setminus B = A$, tai $B = \emptyset$.

30. Naudodami indukcijos metodą įrodykite, kad

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

31. Naudodami indukcijos metodą įrodykite, kad

$$\big(1 + x\big)^n \geq 1 + nx, n > 1, x > -1.$$

32. Naudodami indukcijos metodą įrodykite Niutono Binomo formulę

$$\big(x + a\big)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k x^{n-k}.$$

Pasinaudokite lygybe $C_n^s + C_n^{s-1} = C_{n+1}^s$, čia

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

II. TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

2.1 Tiesinių lygčių sistemos. Elementarieji pertvarkiai

Keletas svarbių žymėjimų:

$$a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k, \quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

čia n natūralusis skaičius. Apibendrinkime šiuos žymėjimus

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \begin{cases} a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m, \text{kai } m > n, \\ a_n, \text{kai } m = n, \\ 0, \text{kai } m < n. \end{cases}$$

Ateityje raidėmis $\mathcal{N}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ žymėsime natūraliųjų, sveikųjų, racionaliųjų, bei realiųjų skaičių aibes.

Apibrėžimas Tiesine lygtimi (toliau trumpinsime t.l.) su n nežinomųjų vadinsime lygybę:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b, \tag{2.1}$$

čia $a_j, b \in \mathcal{R}$, a_j, $(j = 1, \ldots, n)$ vadinami lygties koeficientais, $b-$ lygties laisvuoju nariu, $x_j\,(j = 1, \ldots, n)-$ lygties nežinomaisiais.

Apibrėžimas Racionaliųjų skaičių rinkinį $(l_1, \ldots l_n)$ vadinsime t. l. sprendiniu, jeigu

$$\sum_{j=1}^{n} a_j l_j \equiv b.$$

Kitaip tariant, minėtasis rinkinys vadinamas t.l. sprendiniu, jeigu (2.1) lygtyje nežinomųjų vietoje įrašę šio rinkinio atitinkamus narius gauname tapatybę (abiejose lygybės pusėse tą pačią skaitinę reikšmę).

Sakysime, kad du t.l. sprendiniai $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ ir $(t_1, t_2, \ldots t_n)$ yra lygūs, jeigu $l_j = t_j\,(j = 1, \ldots, n)$. Nesunku matyti, kad (2.1) lygtis sprendinių neturi tada ir tik tada, kai $a_j = 0$, $b \neq 0\,(j = 1, \ldots, n)$.

Apibrėžimas Tiesinę lygtį, kurios laisvasis narys lygus nuliui, vadinsime homogenine.

Pastebėsime, kad homogeninė lygtis visuomet turi sprendinį.

Apibrėžimas Tiesinių lygčių aibę:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.2}$$

vadinsime m tiesinių lygčių, su n nežinomaisiais, sistema (trumpai t.l.s.). Simbolius $a_{ij} \in \mathcal{R}$ vadinsime t.l.s-mos koeficientais, $b_i \in \mathcal{R}-$ t.l.s-mos laisvaisiais nariais, $x_{ij}-$ t.l.s-mos nežinomaisiais, $(i = 1, \dots, m)$, $(j = 1, \dots, n)$.

(2.2) lygčių sistemą galime užrašyti tokiu būdu:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ (i = 1, \dots, m).$$

Sakysime, kad t.l.s. yra homogeninė, jeigu $b_i = 0, \ (i = 1, \dots, m)$.

Apibrėžimas Skaičių rinkinį $(l_1, \dots, l_n)$ vadinsime t.l.s-mos (2.2) sprendiniu, jeigu teisingos tapatybės:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j \equiv b_i(i = 1, \dots, m).$$

Apibrėžimas Jeigu t.l.s- os sprendinių aibė netuščia, tai šią sistemą vadinsime suderinta. Kitu atveju, t.y. jei t.l.s. sprendinių neturi, tai ją vadinsime nesuderinta.

Apibrėžimas Suderintą t.l.s-mą vadinsime apibrėžta, jei sprendinių aibėje yra vienintelis elementas. Kitu atveju suderintą t.l.s. bus vadinama neapibrėžta.

Atkreipsime dėmesį, kad homogeninė t.l.s. visuomet suderinta.

Sakykime, kad duotos dvi tiesinės lygtys, su tuo pačiu nežinomųjų skaičiumi:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b_1, \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = b_2.$$

Sakysime, kad dvi tiesinės lygtys yra *lygios*, jeigu $a_i/c_i = b_1/b_2, \ \ i = 1 \dots n.$

Tiesinės lygties, tarkime pirmosios, ir realaus skaičiaus k sandauga vadinsime tiesinę lygtį

$$\sum_{j=1}^{n} k a_j x_j = k b_1.$$

Dviejų tiesinių lygčių suma vadinsime lygtį

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j + c_j)x_j = b_1 + b_2.$$

Dažnai sprendžiant uždavinius, jei įmanoma, bandoma juos pertvarkyti taip, kad užduoties sprendimas būtų paprastesnis ir tuo pačiu pradinės ir pertvarkytos užduoties atsakymai būtų tie patys.

Apibrėžimas Sakysime, kad dvi t.l.s-mos yra ekvivalenčios, jeigu jų sprendinių aibės sutampa.

Tiesinių lygčių elementariaisiais pertvarkiais vadinsime tokius lygčių veiksmus:

1) sistemos lygčių keitimą vietomis;
2) bet kurios sistemos lygties dauginimą iš skaičiaus nelygaus nuliui;

3) bet kokių dviejų sistemos lygčių sudėtį.

1 **Teorema** Tiesinių lygčių sistemą elementariaisiais pertvarkiais keičiame į sistemą, kuri ekvivalenti pradinei.

$\ominus$

Panagrinėkime pirmąją operaciją. Nesunku suprasti, kad sukeitus lygtis vietomis (2.2) sistemoje gausime sistemą, kurioje bus tos pačios lygtys, tik skirsis lygčių išsidėstymo tvarka. Jeigu $(l_1, \ldots, l_n)$ yra pradinės lygčių sistemos sprendinys, tai akivaizdu, kad šis skaičių rinkinys tinka ir naujosios sistemos visoms lygtims. Taigi gavome, kad lygčių keitimas vietomis sprendinių aibės nekeičia. Kitaip tariant pradinė ir pakeistoji lygčių sistemos yra ekvivalenčios.

Panagrinėkime antrąją, t.y. daugybos iš skaičiaus nelygaus nuliui, operaciją. Padauginkime (2.2) sistemos bet kokią lygtį, tarkim $k-$ąją, iš skaičiaus c. Gausime t.l.s.

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, (i = 1, \ldots, m), i \neq k; \\ ca_{k1}x_1 + ca_{k2}x_2 + \ldots + ca_{kn}x_n = cb_k. \end{cases} \tag{2.2$'$}$$

Įrašę (2.2) lygties sprendinį $(l_1, \ldots, l_n)$ į (2.2)' gauname

$$\begin{cases} b_i \equiv b_i, (i = 1, \ldots, m), i \neq k; \\ cb_k \equiv cb_k. \end{cases}$$

Taigi tas pat rinkinys tinka ir pakeistąjai t.l.s. Teisingas ir atvirkščias teiginys. T.y. jeigu $(t_1, \ldots, t_n)$ yra t.l.s. (2.2)' sprendinys, tai tada turime sąryšius:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}t_j \equiv b_i, (i = 1, \ldots, m), i \neq k; \\ ca_{k1}t_1 + ca_{k2}t_2 + \ldots + ca_{kn}t_n \equiv cb_k. \end{cases}$$

Jau žinome, kad daugindami t.l. iš skaičiaus, lygties sprendinių aibės nepakeičiame, todėl padauginę paskutiniosios sistemos paskutiniąją lygtį iš $1/c$ ir vietoje nežinomųjų įrašę šios sistemos sprendinį gauname tapatybių sistemą

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}t_j \equiv b_i, \ (i = 1, \ldots, m).$$

Taigi ir atvirkščias teiginys teisingas. Vadinasi, pradinės lygčių sistemos ir sistemos, kuri buvo gauta iš pradinės sistemos, jos lygtį padauginus iš nelygaus nuliui skaičiaus, sprendinių aibės sutampa.

Parodysime, kad ir trečioji operacija tiesinių lygčių sistemą transformuoja į jai ekvivalenčią t.l.s-mą.

Prie (2.2) t.l.s-mos $l-$ osios lygties pridėkime $k-$ ąją. Tuomet naujoji t.l.s. atrodys taip:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, (i = 1, \ldots, m), i \neq l; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} (a_{lj} + a_{kj})x_j = b_l + b_k. \end{cases} \tag{2.2$''$}$$

Pastebėsime, kad jeigu $(t_1, \ldots, t_n)$ yra (2.2) sistemos sprendinys, tai šis rinkinys yra pirmųjų $n-1$, (2.2)" sistemos, lygčių sprendinys. Tada

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{lj}+a_{kj})t_j = \sum_{j=1}^{n} a_{lj}t_j + \sum_{j=1}^{n} a_{kj}t_j \equiv b_l + b_k.$$

Taigi, minėtasis skaičių rinkinys yra (2.2)" sistemos sprendinys.

Įrodykime atvirkštinį teiginį. Sakykime, kad $(t_1, \ldots, t_n)$ yra (2.2)" sistemos sprendinys. Kadangi pirmosios $n-1$, sistemų (2.2) ir (2.2)", lygtys yra vienodos, tai telieka patikrinti, kad šis skaičių rinkinys tinka (2.2) sistemos $l-$ąjai lygčiai. Turime

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{lj}+a_{kj})t_j \equiv b_l + b_k.$$

Pasinaudokime jau įrodytais faktais. Žinome, kad padauginę sistemos lygtį iš skaičiaus bei pridėję prie kitos sistemos lygties gausime naują sistemą, ekvivalenčią pradinei. Taigi, padauginkime $k-$tąją lygtį iš -1 ir pridėkime prie paskutiniosios lygybės. Gauname

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lj}t_j = b_l.$$

Taigi, atvirkščias teiginys taipogi teisingas. Vadinasi ir šiuo atveju teorema teisinga.

$\oplus$

Parodėme, kad elementarieji pertvarkiai lygčių sistemą pakeičia jai ekvivalenčia sistema.

2.2 Gauso algoritmas. Tiesinių lygčių sistemų suderinamumas

Tiesinę lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \\ \qquad\quad 0x_n = b_{r+1}, \\ \qquad\quad 0x_n = b_{r+2}, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad 0x_n = b_m, \end{cases}$$

kai $a_{ii} \neq 0,\ i = 1 \ldots, r$, vadinsime daugiakampe t.l.sistema.

Tiesinę lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad\quad a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

$a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, \dots n)$ *vadinsime trikampe.*

Apibrėžimas *Daugiakampę tiesinę lygčių sistemą vadinsime trapecine jei šios sistemos forma yra tokia:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases}$$

čia $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, \dots r)$. *Pastebėsime, kad trikampė tls. yra trapecinės sistemos atskiras atvejis. Būtent, jei* $r = n$, *tai trapecinė tl. sistema sutampa su trikampe, būtent:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

$a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, \dots n)$.

Teisinga tokia teorema.

2 **Teorema** *Bet kuri trapecinė t.l.s. yra suderinta. Jeigu* $r = n$ *(trikampė t.l.s.), tai sistema apibrėžta, jeigu* $r < n$, *tai sistema neapibrėžta. Daugiakampė t.l.s. yra suderinta, jeigu lygties koeficientai turi savybę:* $b_i = 0$, *visiems* $i = r + 1, \dots, m$.

$\ominus$

1. Tarkime iš pradžių, kad $r = n$. Trumpai šią sistemą galime užrašyti taip:

$$\sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1, \dots, n.$$

Kadangi $a_{nn} \neq 0$, tai gauname

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} = l_n.$$

Priešpaskutinioje lygtyje išreiškę kintamąjį x_{n-1} gauname tokią lygybę:

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1n-1}}\big(b_{n-1} - a_{n-1n}l_n\big) = l_{n-1}.$$

Elgdamiesi visiškai analogiškai gauname, kad bet kokiam $i = 1, \dots n$ teisingos lygybės:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\big(b_i - a_{ii+1}l_{i+1} - \ldots - a_{in}l_n\big) = l_i, \ i = 1, \dots, n-1, \ x_n = l_n.$$

Paskutinioji lygybių sistema yra trapecinės lygčių sistemos sprendinys. Ar jis vienintelis? Tarkime priešingai. T.y. egzistuoja kitas sprendinys $(t_1, \dots, t_n)$ toks, kad

$$\sum_{j=i}^{n} a_{ij}t_j \equiv b_i, i = 1, \dots, n.$$

Pakartoję ankstesnius samprotavimus gauname, kad

$$t_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

Bet tuomet $t_n = l_n$. Iš prieš paskutinės lygties gauname, kad $t_{n-1} = l_{n-1}$ ir t.t. Analogiškai samprotaudami gauname, kad $t_i = l_i$, $i = n-3, \ldots, 1$. Matome, kad iš tiesų $t_i = l_i$, $i = 1, \ldots, n$. Vadinasi sprendinys yra vienintelis.

2. Panagrinėkime atvejį, kai $r < n$. (2.3) sistemos visose lygtyse narius su kintamaisiais $x_{r+1}, \ldots, x_n$ perkelkime į dešinę pusę. Tuomet pažymėję

$$b'_i = b_i - a_{ir+1}x_{r+1} - \cdots - a_{in}x_n,\ i = 1, \ldots, r,$$

naudodamiesi (2.3) sistema gausime tokią t.l. sistemą

$$\sum_{j=i}^{r} a_{ij}x_j = b'_i,\ i = 1, \ldots, r.$$

Gavome trikampę t.l. sistemą. Pakartoję 1. dalies samprotavimus gauname, kad $x_1 = l'_1, \ldots, x_r = l'_r$. Be to aišku, kad $l'_i = l'_i(x_{r+1}, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$. Suteikę kintamiesiems $x_i \in \mathcal{R}$, $i = r+1, \ldots, n$ konkrečias reikšmes, gausime skaitines dydžių $l'_1, \ldots, l'_r$ reikšmes. Vadinasi sistemos ($r < n$) sprendinys turi tokį pavidalą:

$$(l'_1, \ldots, l'_r, t_{r+1}, \ldots, t_n),\ t_i \in \mathcal{R}, i = r+1, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Parinkę skaičius t_i, $i = r+1, \ldots, n$, (juos vadinsime laisvaisiais kintamaisiais) gauname kitus sprendinius. Taigi, šiuo atveju t. l. sistema turi begalo daug sprendinių. (2.4) sprendinys paprastai vadinamas t.l. sistemos bendruoju sprendiniu. Tuo atveju, kai bendrąjame sprendinyje parenkame konkrečias laisvųjų kintamųjų reikšmes, šį sprendinį vadiname *atskiruoju* t.l. sistemos sprendiniu. Sprendinys, gaunamas laisvųjų nežinomųjų vietoje įrašius nulines reikšmes bus vadinamas *baziniu* sprendiniu.

$\oplus$

Rasime t.l.s. sprendinius, kai sistema yra specialios formos.

Pavyzdys

Išspręskime trikampę t.l.s sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ \quad 3x_2 - x_3 = 3, \\ \qquad 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Pastebėkime, kad iš paskutiniosios lygties išplaukia, kad $x_3 = 3$. Įrašę šią x_3 reikšmę į antrąją lygtį gauname, kad $3x_2 - 3 = 3$ arba $x_2 = 2$. Turimas x_2 ir x_3 reikšmes įrašę į pirmąją lygtį gauname, kad $2x_1 + 2 + 3 = 1$ arba $x_1 = -2$. Gavome, kad duotoji trikampė sistema turi vienintelį sprendinį $(-2, 2, 3)$. Patikrinkite ar šis rinkinys yra sprendinys!

Raskime trapecinės tiesinės lygčių sistemos sprendinius.
Pavyzdys

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = 2, \ (L_1) \\ \quad 3x_2 - 6x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 3, \ (L_2) \\ \qquad x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 3. \ (L_3) \end{cases}$$

Pastebėsime, kad spręsdami trapecines t.l.s-mas mes elgsimės analogiškai kaip ir spręsdami trikampes sistemas, tik prieš tai trapecinėje sistemoje, pradėdami nuo paskutinės lygties, palikame vieną nežinomąjį kairėje pusėje, likusius nežinomuosius keliame į dešinę pusę ir visas sistemos lygtis pertvarkome taip, kad iš apačios į viršų kairėje pusėje būtų po vieną nežinomąjį daugiau, o dešinėje pusėje būtų skaičiai ir paprastai tie patys nežinomieji visose lygtyse, kurie bus vadinami laisvaisiais nežinomaisiais.

Taigi, nežinomąjį x_3 išreiškiame per x_4 ir x_5, x_4, x_5 yra laisvieji nežinomieji. Pertvarkydami lygtis iš apačios į viršų, visose lygtyse laisvaisiais nežinomaisiais laikydami tuos pačius kintamuosius gauname sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 5x_4 - x_5, \ (L_1) \\ \quad 3x_2 - 6x_3 = 3 + 6x_4 - 3x_5, \ (L_2) \\ \qquad x_3 = 3 - 3x_4 + 3x_5. \ (L_3) \end{cases}$$

Tiesa, kai kuriose lygtyse kai kurie laisvieji nežinomieji gali būti su nuliniais koeficientais. Pastebėsime, kad lygtyje L_2, nežinomąjį x_2 galime išreikšti tokiu būdu:

$$3x_2 = 3 + 6x_3 + 6x_4 - 3x_5.$$

Padauginę abi šios lygybės puses iš 1/3 gauname, kad $x_2 = 1 + 2x_3 + 2x_4 - x_5$.

Įrašę į paskutinę lygtį aukščiau gautą x_3 reikšmę gauname: $x_2 = 1 + 2(3 - 3x_4 - 3x_5) + 2x_4 - x_5 = 7 - 4x_4 - 7x_5$.

Iš pirmosios lygties, išreiškę x_1 likusias nežinomaisias ir įrašę gautąsias nežinomųjų x_3, x_2 reikšmes turime lygtį

$2x_1 = 2 - 7 + 4x_4 + 7x_5 - 3 + 3x_4 - 3x_5 + 5x_4 - x_5$. Sutraukę panašius narius, o po to padauginę abi lygybės puses iš 1/2 gausime lygtį $x_1 = -4 + 6x_4 + (3/2)x_5$.

Taigi, šios sistemos bendrasis sprendinys yra toks:

$$(-4 + 6x_4 + \frac{3}{2}x_5, 7 - 4x_4 - 7x_5, 3 - 3x_4 - 3x_5, x_4, x_5), \ x_4, x_5 \in \mathcal{R}.$$

Matome, kad šiuo atveju trapecinė t.l.s. turi begalo daug sprendinių, kurie priklauso nuo $x_4, x_5 \in \mathcal{R}$ parinkimo. Pavyzdžiui, parinkę $x_4 = 1, x_5 = 0$ gauname atskirąjį sprendinį $(2, 3, 0, 1, 0)$.

Nagrinėjamu atveju, baziniai nežinomieji yra x_1, x_2, x_3, o laisvieji nežinomieji- x_4, x_5. Parinkę $x_4 = x_5 = 0$ gauname bazinį sprendinį

$$(-4, 7, 3, 0, 0).$$

Panagrinėkime daugiakampę tls. Akivaizdu, kad daugiakampė t.l.s. yra nesuderinta, jei sistemoje egzistuoja lygtis, tarkime $i - oji$, kurios laisvasis narys $b_i \neq 0$. Pavyzdžiui lygtis $0x_3 = 5$ sprendinių neturi. O jei lygtyse $0x_i = b_i$, visi $b_i = 0, i = r+1, \ldots, m$ tai daugiakampė sistema tampa trapecine, kadangi šiuo atveju visas šias lygtis galima praleisti, nes jas tenkina bet kokie realiųjų skaičių rinkiniai. Kitaip tariant, sprendinių aibės šios lygtys neriboja.

Išspręskime daugiakampę t.l.s.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 2, \ (L_1) \\ \quad 6x_4 = 3, \ (L_2) \\ \qquad 3x_4 = 3. \ (L_3) \end{cases}$$

Padauginę trečią lygtį iš -2 ir pridėję šią lygtį prie antrosios gauname sistemą:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 2, \ (L_1) \\ \quad 0x_4 = -3, \ (L_2) \\ \qquad 3x_4 = 3. \ (L_3) \end{cases}$$

Matome, kad šios sistemos antrosios lygties netenkina joks skaičių rinkinys taigi, ši sistema sprendinių neturi.

Parodysime, kad bet kokią tiesinių lygčių sistemą, naudodami elementariuosius pertvarkius, galime transformuoti į trapecinę. Kitaip tariant bet kokiai t.l. sistemai galime nurodyti ekvivalenčią trapecinę t.l. sistemą.

Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad nehomogeninė t.l.s. yra nesuderinta, jeigu kurios nors lygties, tarkime $i-$ osios, visi koeficientai lygūs nuliui, o laisvasis narys $b_i \neq 0$. Todėl, jeigu sistemoje yra tokia lygtis, tai ši sistema nesuderinta. Jeigu sistemoje yra lygtis (tarkime $i-$oji), kurios visi koeficientai $a_{ij} = 0$, $(i = 1, \ldots, m), (j = 1, \ldots, n)$ ir $b_i = 0$ tai tokią lygtį galime praleisti, nes šios lygties sprendiniais gali būti bet kokie realiųjų skaičių rinkiniai.

Gauso metodas. Nagrinėsime (2.2) t.l. sistemą. Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad $a_{11} \neq 0$. Aišku, kad jeigu $a_{11} = 0$, tai sukeitę pirmąją lygtį su sistemos kokia tai lygtimi, kurios pirmasis koeficientas, sakykime $a_{i1} \neq 0$, kokiam nors $i = 2 \ldots, m$ ir peržymėję koeficientus gausime, kad pirmosios lygties pirmasis koeficientas nelygus nuliui. Visi $a_{i1} = 0$, $(i = 1, \ldots, m)$ negali būti, nes tuomet nagrinėjamoji t.l.s. turėtų mažiau kintamųjų negu (2.2) sistema.

Taigi, laikome, kad $a_{11} \neq 0$. Tuomet padauginę pirmąją (2.2) t.l.s-mos lygtį iš skaičių $-(a_{i1}/a_{11})$, $i = 2, \ldots, m$ ir sudėję su antrąja, trečiąją ir t.t. $m-$ąja sistemos lygtimis, gausime pradinei t.l.s- mai ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases} \tag{2.5}$$

čia

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}, \ b_j^1 = b_j - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1,$$

$i = 2, \dots m, j = 2, \dots n$.

Pastebėsime, kad (2.5) sistemos $m-1$ lygtys neturi x_1 nežinomojo. Eliminavimo procesą tęsiame toliau. Analogiškai kaip ir pirmąjame žingsnyje nemažindami bendrumo galime laikyti, kad koeficientas $a_{22} \neq 0$. Tuomet, padauginę (2.5) sistemos antrąją lygtį iš daugiklio $-a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ ir gautą rezultatą pridėję prie lygčių $i = 3, 4, \dots, m$ gauname sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_2 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m3}^{(2)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(2)}x_n = b_m^{(2)}, \end{cases}$$

čia

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}a_{2j}^{(1)},\ b_j^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}b_2^{(1)},\ i = 3, \dots m, j = 3, \dots n.$$

Samprotaudami visiškai analogiškai, po $m-1$, jeigu $m = n$ žingnio gausime tokią t.l.s-mą:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_2 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k + \dots + a_{kn}^{(k-1)}x_n = b_k^{(k-1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}, \end{cases} \tag{2.6}$$

o jeigu $m < n$, tai tada gauname sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_2 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{mm}^{(m-1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(m-1)}x_n = b_m^{(m-1)}, \end{cases} \tag{2.7}$$

ir visais atvejais

$$a_{ij}^{(l)} = a_{ij}^{(l-1)} - \frac{a_{il}^{(l-1)}}{a_{ll}^{(l-1)}}a_{lj}^{(l-1)},\ b_i^{(l)} = b_i^{(l-1)} - \frac{a_{il}^{(l-1)}}{a_{ll}^{(l-1)}}b_l^{(l-1)},$$

$i = l+1, \dots m, j = l+1, \dots, n$. Pastebėsime, kad indeksas viršuje virš koeficientų parodo kelis kartus buvo "paveiktas" koeficientas.

Pastebėsime, kad tuo atveju, kai $m > n$, t.y. sistemoje lygčių daugiau negu nežinomųjų, atlikę n žingnių gauname sistemą:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}, \\ 0 = b_{n+1}^{(n-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ \ 0 = b_m^{(n-1)}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Be to, atliekant t.l.s-mos elementariuosius pertvarkius gali atsitikti taip, kad kokiame tai $r < m$ žingsnyje gauname tokią sistemą:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{rr}^{(r-1)}x_r + \ldots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\ \ \ 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ \ 0 = b_m^{(r-1)}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Apibendrinkime gautus rezultatus. Jeigu pertvarkydami (2.2) t.l.s- mą gavome (2.6) arba (2.7) sistemą, tai pradinė t.l. sistema turi sprendinį, t.y. ji suderinta. Jeigu gavome (2.8) arba (2.9) sistemas, tai pradinė sistema suderinta tik tuo aveju, kai $b_k^{(n-1)} = 0$ ir $b_j^{(r-1)} = 0,\ j = r+1, \ldots, m, \quad k = n+1, \ldots, m.$

Pateiksime kelis, šio metodo taikymo, pavyzdžius.

1. Pavyzdys

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2,\ (L_1) \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3,\ (L_2) \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6.\ (L_3) \end{cases}$$

Sukeitę (L_1) lygtį su (L_2) lygtimi (tai elementarusis pertvarkis) gauname tokią sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3,\ (L_2) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2,\ (L_1) \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6.\ (L_3) \end{cases}$$

Pastebėsime, kad spręsdami t.l. sistemas mes galime lygčių sistemoje vietomis nekeisti, tik šiuo atveju reikia atkreipti dėmesį, kad galutinė t.l.sistemos (trapecinė ar daugiakampė) forma nebus tokia kokia buvo nurodyta 1 Teoremoje, bet atsakymas nuo to nepriklausys.

Dabar atlikime tokius elementariuosius pertvarkius: $-2L_2 + L_1 = L_2^1$ ir $-3L_1 + L_3 = L_3^1$. Gauname pradinei t.l.s-mai ekvivalenčią sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3,\ (L_2) \\ \quad -5x_2 + 3x_3 = -4,\ (L_2^1) \\ \quad -7x_2 + 7x_3 = -3.\ (L_3^1) \end{cases}$$

Atlikę elementarųjį pertvarkį $7L_2^1 - 5L_3^1 = L_3^2$ gauname, sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \ (L_2) \\ \quad -5x_2 + 3x_3 = -4, \ (L_2^1) \\ \qquad -14x_3 = -13. \ (L_3^2) \end{cases}$$

Matome, kad paskutinioji t.l.s. yra trikampė. Taigi, ši sistema turi vienintelį sprendinį. Nesunkiai randame, kad $(-743/14, 19, 13/14)$.

2. Pavyzdys Išspręskime tokią sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \ (L_2) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \ (L_1) \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 1. \ (L_3) \end{cases}$$

Atlikę elementariuosius pertvarkius $-2L_1 + L_2 = L_2^1$ ir $-3L_1 + L_3 = L_3^1$, gauname pradinei t.l.s-ai ekvivalenčią t.l.s-ą:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \ (L_2) \\ \quad -5x_2 + 3x_3 = -4, \ (L_2^1) \\ \qquad 0 = 1. \ (L_3^1) \end{cases}$$

Paskutinioji sistema yra išsigimusi trapecinė t.l.s., taigi, ši lygčių sistema sprendinių neturi.

3. Pavyzdys Išspręskime dar vieną t.l.s-ą. Turime

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \ (L_2) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \ (L_1) \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 9. \ (L_3) \end{cases}$$

Atlikę elementariuosius pertvarkius: $-2L_1 + L_2 = L_2^1$ ir $-3L_1 + L_3 = L_3^1$ gauname tokią t.l.s-ą

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \ (L_2) \\ \quad -5x_2 + 3x_3 = -4, \ (L_2^1) \\ \qquad 0 = 0. \ (L_3^1) \end{cases}$$

Paskutiniąją lygtį praleidžiame, kadangi ji visada suderinta. Matome, kad paskutinioji sistema yra trapecinė. Išsprendę šią sistemą gauname, kad šios sistemos bendrasis sprendinys yra

$$\left(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}x_2, x_2, \frac{-4}{3} + \frac{5}{3}x_2\right), \quad x_2 \in \mathcal{R}.$$

Reikėtų atkreipti skaitytojo dėmesį į tai, kad sąvoką "trapecinę" (trikampė ar daugiakampė) nereikia suprasti paraidžiui kaip parašyta. T.y. pertvarkant lygtis nebūtinai reikia laikytis kintamųjų eliminavimo tvarkos kuri buvo atliekama teoriškai samprotaujant ir atliekama pateikiant pavyzdžius. Reikia skaitytojui atkreipti dėmesį į tai, kad esminis momentas, sprendžiant t.l.sistemas, yra tai, kad kiekvienoje žemiau esančiose lygtyje turi likti griežtai mažiau nežinomųjų negu aukščiau esančiose.

4. Pavyzdys Panagrinėkime t.l.sistemą

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3, \ (L_1) \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -4, \ (L_2) \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \ (L_3) \end{cases}$$

Pastebėsime, kad generaline eilute galime pasirinkti trečią lygtį, o generaliniu elementu koeficientą prie x_3. Paeiliui atlikę veiksmus $3L_3 + L_2 = L_2^1$ ir $-2L_3 + L_1 = L_3^1$ bei trečiąją lygtį perrašę pirmosios vietoje gauname sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \ (L_3) \\ 8x_1 + 7x_2 \quad = -4, \ (L_2^1) \\ -x_1 - 3x_2 \quad = 3. \ (L_3^1) \end{cases}$$

Dabar generaline eilute pasirenkame L_3^1 lygtį, o generaliniu koeficientu -1 esantį prie x_1. Atlikę operaciją $8L_3^1 + L_3^1 = L_2^2$ gauname sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \ (L_3) \\ \quad -17x_2 \quad = 20, \ (L_2^2) \\ -x_1 - 3x_2 \quad = 3. \ (L_3^1) \end{cases}$$

Bet paskutinioji sistema yra trikampė. Taigi, ji turi vienintelį sprendinį, kurį rasti siūlome skaitytojui.

2.3 Gauso - Žordano metodas

Šiame trumpame skyrelyje paminėsime dar vieną tiesinių lygčių sistemų sprendimo būdą, kuris supaprastina tiesinių lygčių sistemų užrašymo būdą, kuomet sprendžiant t.l.s. nėra perrašinėjami nežinomieji.

Tarkime, kad duota tiesinių lygčių sistema

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ (i = 1, \dots, m).$$

Pažymėkime

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & |b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & |b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & |b_n \end{pmatrix}.$$

Matrica A vadinama duotosios tiesinių lygčių sistemos matrica, o matrica B vadinama išplėstine tiesinių lygčių sistemos matrica. Tada t.l.s. galima užrašyti matricine forma naudodami išplėstinę matricą. Šiuo atveju laikome, kad vertikalus brūkšnys t.l.s. matricoje atitinka lygybės ženklą.

Pavyzdžiui t.l.s.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ \qquad x_2 - x_3 = -3, \\ \qquad\qquad x_3 = 3. \end{cases}$$

išplėstine matrica gali būti užrašyta tokiu būdu:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & |2 \\ 0 & 1 & -1 & |-3 \\ 0 & 0 & 1 & |3 \end{pmatrix}.$$

Užrašykime t.l.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ (i = 1, \dots, m)$$

išplėstinę matricą.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & |b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & |b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & |b_n \end{pmatrix}.$$

T.l.s. matricos (išplėstinės matricos) eilučių elementariaisias veiksmais vadinsime

1) matricos eilučių keitimą vietomis;

2) bet kokios eilutės dauginimą iš skaičiaus nelygaus nuliui;

3) bet kokių dviejų eilučių sudėtį.

Atkreipsime skaitytojo dėmesį, kad atlikę matricos eilučių elementariuosius veiksmus gausime kitą matricą (skaičių lentelę) kurią atitinkanti t.l.s. bus ekvivalenti pradinei t.l.s.

Nesunku suprasti, kad atliekant matricos eilučių elementariuosius veiksmus (analogiškus t.l.s. eilučių veiksmams) gausime matricą

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & |b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & |b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{rr}^{(r-1)} & \dots & a_{rn}^{(r-1)} & |b_r^{(r-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & |b_{r+1}^{(r-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & |b_m^{(r-1)} \end{pmatrix}.$$

Jeigu perrašytume gautąją matricą į lygčių sistemą, gautume jau nagrinėtą atvejį (žr. 2.2 skyrelį, 2.9 lygybę) daugiakampę t.l.s.

Tęskime t.l.s., užrašytos matricine forma analizę. Tegu $b_{r+1}^{(r-1)} = \dots = b_m^{(r-1)} = 0$. Priešingu atveju t.l.s. būtų nesuderinta (kodėl?).

Pertvarkykime šią matricą tokiu būdu, kad ji reprezentuotų trikampę t.l.s.. Šio pertvakymo esmė- perkeliame visose t.l.s. lygtyse visus dėmenis pradedant $r+1$ į dešinę pusę (tuo pačiu matricos eilutėse už brūkšnio į dešinę pusę keliame visus elementus keisdami jų ženklus). Gauname tokią matricą

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & |b_1 & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2r}^{(1)} & |b_2^{(1)} & a_{2r+1}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{rr}^{(r-1)} & |b_r^{(r-1)} & a_{rr+1}^{(r-1)} & \dots & a_{rn}^{(r-1)} \end{pmatrix}.$$

Matome, kad dešiniosios matricos (tuo pačiu ir t.l.s. lygybės pusės) priklauso nuo nežinomųjų $x_{r+1}, \dots, x_n$. Pažymėkime

$$c_i = a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{in}x_n, \quad i = 1, \dots, r.$$

Tada gauname sistemą:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & |c_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & |c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{rr}^{(r-1)} & |c_r \end{pmatrix}.$$

Paskutiniąją eilutę daugindami iš atitinkamų daugiklių ir sudėdami su aukščiau esančiomis eilutėmis galime gauti kad virš elemento $a_{rr}^{(r-1)}$ esančiame stulpelyje bus nuliniai elementai, o kiti matricos elementai (išskyrus dešiniąsias puses) nesikeičia, t.y. t.y.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & |c^(1)_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & 0 & |c_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{r-1r-1}^{(r-2)} & 0 & |c_{r-1}^{(r-1)} \\ 0 & \dots & 0 & a_{rr}^{(r-1)} & |c_r \end{pmatrix}.$$

Atlikdami analogiškus eliminavimo žingsnius su antrąja, trečiąja ir t.t. priešpaskutiniąja nuo $r-$ osios eilutės esančiomis eilutėmis gausime tokią matricą

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & |c_1^{(r-1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & 0 & |c_2^{(r-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{rr}^{(r-1)} & |c_r \end{pmatrix}.$$

Padalinę kiekvieną $i-$ ąją eilutę iš elemento $a_{ii}^{(i-1)}$ gauname matricą

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & |\frac{c_1^{(r-1)}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & |\frac{c_2^{(r-2)}}{a_{22}^{(1)}} \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \dots & 0 & 1 & |\frac{c_r}{a_{rr}^{(r-1)}} \end{pmatrix}.$$

Užrašę šios matricos t.l.s. gauname sistemos sprendinį:

$$\Big(\frac{c_1^{(r-1)}}{a_{11}},\ \frac{c_2^{(r-2)}}{a_{22}^{(1)}},\ \frac{c_r}{a_{rr}^{(r-1)}}, x_{r+1}, \dots, x_n.\Big)$$

Jei $r = n$, tai sprendinys vienintelis, kitu atveju sprendinių begalo daug, kadangi gautasis sprendinys priklauso nuo laisvųjų nežinomųjų $x_{r+1}, \dots, x_n$.

Šis aptartas metodas vadinamas Gauso-Žordano metodu.

Pavyzdys Išspręskime sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad\ \ = 1, \\ 2x_2 + x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 \ \ + \ \ 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Gauso-Žordano būdu.

Perrašę šią sistemą matriciniu būdu gauname

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & |1 \\ 2 & 1 & 1 & |4 \\ 3 & 0 & 2 & |8 \end{pmatrix}.$$

Spręskime šią sistemą atlikdami eilučių elementariuosius pertvarkius (veiksmus).

Atlikę matricos eilučių veiksmus $-2L_1 + L_2$ ir $-3L_1 + L_3$ gauname tokią t.l.sistemos matricą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & |1 \\ 0 & -1 & 1 & |2 \\ 0 & -3 & 2 & |5 \end{pmatrix}.$$

Sudėję $-3L_2 + L_3$ turėsime

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & |1 \\ 0 & -1 & 1 & |2 \\ 0 & 0 & -1 & |-1 \end{pmatrix}.$$

Sudėję $L_3 + L_2$ gauname

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & |1 \\ 0 & -1 & 0 & |1 \\ 0 & 0 & -1 & |-1 \end{pmatrix}.$$

Atlikę paskutinį veiksmą $L_2 + L_1$ ir padauginę antrąją ir trečiąją eilutes iš -1 gauname:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & |2 \\ 0 & 1 & 0 & |-1 \\ 0 & 0 & 1 & |1 \end{pmatrix}.$$

Tada paskutiniosios trikampės sistemos sprendinys yra toks:
$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1.$

Pavyzdys Išspręskime minėtu būdu dar vieną t.l.s. Tarkime duota sistema iš karto užrašyta matricine forma:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & |1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & |2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & |3 \end{pmatrix}.$$

Atlikę eilučių veiksmą $L_3 - L_2$ gauname tokią lygčių sistemos matricą:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & |1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & |1 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & |3 \end{pmatrix}.$$

Atlikę veiksmą $L_1 - L_2$ gauname sistemą

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & |1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & |3 \end{pmatrix}.$$

Bet antroji eilutė- nulinė, taigi ją galima praleisti, kadangi šią eilutę atitinkanti lygtis visada turi sprendinį. Taigi, praleidę minėtą eilutę ir atlikę eilučių veiksmą $L_1 - L_3$ gauname tokią sistemos matricą:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & |1 \\ -3 & -2 & 0 & -1 & |-2 \end{pmatrix}.$$

Kadangi gautoji sistema yra neapibrėžta (lygčių mažiau negu nežinomųjų), tai kairėje pusėje paliekame tiek nežinomųjų, kiek yra lygčių, o likusius nežinomuosius keliame į dešinę pusę, beje turime įsidėmėti prie kokių nežinomųjų koeficientus paliekame kairėje pusėje, o kokis keliame į dešinę. Paprastai kairėje pusėje paliekami paprastesni koeficientai. Mūsų nagrinėjamu atveju patogu būtų palikti koeficientus prie x_2, x_3. Gauname sistemą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & |1 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & |-2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Laikinai, į dešinės pusės narius žiūrėsime kaip laisvąjį narį. Tada, atlikę veiksmą $2L_1 + L_2$ gauname sistemą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & |1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & |0 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Padauginę sistemos antrąją lygtį iš $\frac{1}{2}$ gauname

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & |1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & |0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Paskutinis veiksmas bus toks:$-L_2 + L_1$. Gauname

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & |1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & |0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Rašant sistemos bendrąjį sprendinį būtina žinoti, kokioje vietoje yra sistemos nežinomųjų koeficientai. Taigi, turėdami tai omenyje, turime

$$x_2 = 1 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_1, \;\; x_3 = -\frac{5}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_1.$$

Tada, sistemos bendrasis sprendinys yra toks:

$$(x_1, 1 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_1, -\frac{5}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_1, x_4), \;\; x_1,\, x_4 \in \mathcal{R}.$$

Uždaviniai

1. Išspręskite pateiktąsias tiesinių lygčių sistemas:

$a)$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -7, \\ \qquad x_2 - x_3 = -3, \\ \qquad\qquad x_3 = 3. \end{cases}$$

ATS: $(2, 0, 3)$

$b)$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = -6, \\ \qquad x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

ATS: $(9 - 7x_4, -6, 3 - 2x_4, x_4) \;\; x_4 \in \mathcal{R}.$

2. Naudodami Gauso metodą išspręskite lygčių sistemas:

$a)$
$$\text{a)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

ATS: $(1, 1, 1)$

$b)$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$$

ATS: $(2, 1, 1)$

$c)$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

ATS: $\emptyset$

$d)$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

ATS: $(1, 0, 0, 1)$

$e)$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$$

ATS: $(1, 2, 3, 4)$

$f)$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

ATS: $(1,\ 1,\ 1)$

$g)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -4, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

ATS: (2, 0, 0, 2)

$h)$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 12, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 8, \\ -x_1 - 2x_2 + 8x_3 = -12. \end{cases}$$

ATS: (2, 1, -1)

$i)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 6, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

ATS: (3, 0,1, -1)

$j)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 6x_5 = -5, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + -3x_4 - x_5 = 4. \end{cases}$$

ATS: Atskiras sprendinys: (1, 1, 1, 2, 2)

$k)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 - 2x_5 = -4, \\ x_1 - 9x_2 + x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 7. \end{cases}$$

ATS: (3, 0, 2, 0, 1)

$l)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -12, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -8. \end{cases}$$

ATS: (0, 3, 0, 1)

$m)$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_3 - x_4 = 8. \end{cases}$$

ATS: Sprendinių nėra

$n)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 9, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -11, \\ -3x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 13, \\ -3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 11. \end{cases}$$

ATS:$(1 + 24x_4, -2 - 49x_4, 1 - 29x_4, x_4) \quad x_4 \in \mathcal{R}.$

3. Kokios turi būti parametro a reikšmės, kad tls. turėtų a) vieną sprendinį, b) begalo daug sprendinių, c) sprendinių neturėtų.

$a)$

$$\begin{cases} (1-a)x_1 - (a-1)x_2 \quad = 0, \\ x_1 + (a-1)x_2 + (a+2)x_3 = 0, \\ -9x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

ATS: a) Vieną sprendinį, kai $a \neq 3$; b) kai $a = 3$; c) nėra tokios a reikšmės.

$b)$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 18, \\ -x_1 + 9x_2 + x_3 - ax_4 = 1 - a. \end{cases}$$

ATS: Visada nesuderinta

4. Kokios turi būti parametrų m, n reikšmės, kad sistema

$$\begin{cases} mx_1 - 4x_2 - 5x_3 = n, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 4, \end{cases}$$

turėtų a) vienintelį, b) neturėtų sprendinių, c) turėtų be galo daug sprendinių?

ATS: a) $m \neq -\frac{33}{7}$; b) $m = -\frac{33}{7}, \;\; n \neq -\frac{89}{7}$; b) $m = -\frac{33}{7}, \;\; n = -\frac{89}{7}$.

5. Kokios turi būti parametrų m, n reikšmės, kad sistema

$$\begin{cases} 3x_1 - mx_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = n, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \end{cases}$$

turėtų a) vienintelį, b) neturėtų sprendinių, c) turėtų be galo daug sprendinių?

ATS: a) $m \neq -6$; b) $m = -6, \;\; n \neq -9$; b) $m = -6, \;\; n = -9$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

ATS: $(0, -x_5, -x_5, -x_5, x_5) \;\; x_5 \in \mathcal{R}$.

6. Sudarykite tiesinių lygčių sistemą, kurios vienintelis sprendinys būtų $(2, 3, -4)$. Sudarykite tiesinę lygčių sistemą, kurios vienas iš sprendinių būtų šis rinkinys. Sudarykite tiesinę lygčių sistemą, kurios sprendinių aibė būtų tuščia.

7. Sudarykite tiesinių lygčių sistemą, kurios vienas iš begalinio sprendinių skaičiaus yra sprendinys $(4, 3, 1)$.

8. Išspręskite duotąsias tiesinių lygčių sistemas, naudodami Gauso -Žordano metodą:

a)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 7. \end{cases}$$

ATS: $(1, -1, -1)$

b)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 4, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 = 1. \end{cases}$$

ATS: $(1,2,0,1)$

c) $$\begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3+6x_4=10, \\ x_2+2x_3+x_4=2, \\ 3x_1-3x_3+6x_4=9. \end{cases}$$

ATS: $(-2.5x_4+4, 0, -0.5x_4+1, x_4) \quad x_4 \in \mathcal{R}.$

d) $$\begin{cases} x_1-6x_2-x_3+x_4+2x_5=1, \\ 2x_2+3x_3-2x_4+x_5=-10, \\ 6x_3+4x_4-8x_5=5, \\ x_1-4x_2+2x_3-x_4+3x_5=-9. \end{cases}$$

ATS: $(\frac{1}{3}(-107+31x_4-47x_5), \frac{1}{4}(-25+8x_4-10x_5), \frac{1}{6}(5-4x_4+8x_5), x_4, x_5) \quad x_5\, x_4 \in \mathcal{R}.$

e) $$\begin{cases} 3x_1+4x_2+5x_3+3x_4-x_5=1, \\ 2x_1-3x_2-6x_3+2x_4+3x_5=-3, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4-5x_5=3, \\ 6x_1+3x_2+2x_3+4x_4-3x_5=1, \\ x_1-5x_2-9x_3+3x_4+8x_5=-6. \end{cases}$$

ATS: $(\frac{9}{2}+\frac{7}{2}x_4+9x_5, -15-14x_4-29x_5, \frac{19}{2}+\frac{17}{2}x_4+18x_5), x_4, x_5) \quad x_5,\, x_4 \in \mathcal{R}.$

f) $$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ 2x_1-2x_2+3x_3-3x_4-2x_5=0, \\ 4x_1-x_2-4x_3+2x_4+3x_5=1, \\ 3x_1-x_2+4x_3-2x_4-x_5=4, \\ 2x_1+2x_2-7x_3+5x_4+5x_5=3. \end{cases}$$

ATS: Sprendinių nėra

9. Išspręskite duotąsias tiesinių lygčių sistemas, naudodami Gauso metodą, kai t.l.s. apibrėžta matricine forma.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1| & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -2| & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 2| & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & -1| & 0 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 0 & 1| & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1| & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & 2 & 0| & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2| & 0 \end{pmatrix}$$

ATS: *a)* $(x_4, -5x_4, \frac{19}{3}x_4, x_4, \frac{8}{3}x_4)$, $x_4 \in \mathcal{R}$; *b)* $(-5x_4 + 7x_5, 2x_4 - 5x_5, x_5 - x_6, x_4, x_5, x_6)$; $x_4, x_5, x_6 \in \mathcal{R}$.

10. Gamykla gamina trijų rūšių produkciją, tarkime A, B, C. Pardavus šių produktų vienetą yra gaunamas $1, 2, 3$ Lt pelnas, atitinkamai. Fiksuoti gamybos kaštai yra 17000Lt per metus, o minėtų produktų vieneto gamybos (kintamieji) kaštai sudaro $4, 5, 7$ Lt atitinkamai. Kitais metais numatoma pagaminti 11000 vienetų, visų trijų rūšių, produktų. Yra žinoma, kad jie bus realizuoti, ir bendras pelnas turėtų sudaryti 25000 Lt. Kiek kiekvienos rūšies produktų reikėtų pagaminti, jeigu bendrosios išlaidos sudarys 80000 Lt?

ATS: (2000, 4000, 5000)

11. Gamykla gamina dviejų rūšių produktus A ir B. Pardavus vieną vienetą A rūšies produkto gaunamas 8 Lt pelnas, o $B-$ 11 Lt pelnas. Buvo pastebėta, kad A rūšies produktų yra parduodama 25% daugiau negu B. Kitais metais gamykla planuoja 42000 Lt pelną. Kiek vienetų kiekvieno produkto reikėtų pagaminti, kad ketinimai būtų realizuoti?

12. Penkioms Lietuvos pramonės šakoms p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 yra skiriama parama iš penkių fondų. Žinoma, kad Lietuva iš pirmojo fondo gali gauti 55 mln., antrojo- 70 mln., trečiojo- 48 mln., ketvirtojo- 60 mln., penktojo- 44 mln. litų. Pramonės šakų įvairus įmonių skaičius pretenduoja į šių fondų lėšas. Rinkinys $(7, 2, 3, 2, 1)$ reiškia, kad p_1 šakos 7 įmonės siekia gauti pirmojo fondo lėšas, 2 įmonės- antrojo fondo lėšas ir t.t.. Analogiškai, pramonės šakos p_2 įmonių skaičius siekiančių gauti atitinkamų fondų paramą yra $(4, 4, 3, 4, 1)$, toliau p_3- $(3, 3, 1, 5, 3)$, p_4, $(5, 1, 5, 3, 5)$, ir p_5 $(4, 7, 2, 3, 2)$. Kaip būtų galima paskirstyti fondų pinigus pramonės šakoms? Ar galimas tik vienintelis pinigų paskirstymas ar ne tam, kad visų fondų visi pinigai būtų išnaudoti?

13. Gydytojas nurodė pacientui kas savaitę naudoti vitaminus tokiu būdu: vitamino A 10 vienetų, vitamino D 9 vienetus ir vitamino E 19 vienetų. Pacientas šiuos vitaminus gali pasirinkti kapsulėse, kuriose nurodytų vitaminų kiekis yra sudarytas tokiu būdu:, kapsulėje X yra 2 vitamino A vienetai, 3 vitamino D ir 5 vitamino E vienetai; kapsulėje Y yra $1, 3, 4$ šių vitaminų vienetai atitinkamai, kapsulėje Z yra 1 vitamino A ir vienas vitamino E vienetas.

a) Kaip paskirstyti kapsules, kad pacientas per savaitę gautų tinkamą vitaminų skaičių;

b) tarkime, kad kapsulė X kainuoja 1 Lt, kapsulė $Y-$ 6 Lt, o kapsulė $Z-$ 3 Lt. Ar galima sudaryti kapsulių derinį, kuris kainuotų 15 Lt savaitei?

c) kuri savaitinė kapsulių kombinacija pigiausia, o kuri brangiausia?

ATS: a) $(3, 0, 4)$; $(2, 1, 5)$, $(1, 2, 6)$, $(0, 3, 7)$;

b) $(3, 0, 4)$; c) $(3, 0, 4)$, $(0, 3, 7)$.

III. VEKTORINĖ ERDVĖ $\mathcal{R}^n$

3.1 Vektoriai. Vektorių veiksmai

Apibrėžimas Sutvarkytą realių skaičių rinkinį $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vadinsime $n-$ mačiu vektoriumi. Skaičiai $a_j \in \mathcal{R}$, $(j = 1, \ldots, n)$ vadinami vektoriaus koordinatėmis.

Sakinys "sutvarkytas skaičių rinkinys " reiškia, kad koordinačių padėtis vektoriuje yra svarbi. Vektorius žymėsime mažosiomis graikiškosios abėcėlės raidėmis. Jeigu vektorius turi n koordinačių, tai sakysime, kad jis aibės $\mathcal{R}^n$ elementas.

Apibrėžimas Sakysime, kad aibės $\mathcal{R}^n$ elementai $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ir $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ yra lygūs, jeigu jų atitinkamos koordinatės lygios, t.y. $a_j = b_j$, $(j = 1, \ldots, n)$,

Apibrėžimas Vektorių α ir β suma (žymėsime $\alpha + \beta$) vadinsime vektorių γ, kurio koordinatės nusakomos lygybėmis $c_j = a_j + b_j$, $(j = 1, \ldots, n)$. Taigi,

$$\alpha + \beta = \gamma = (a_1 + b_1, \ldots a_n + b_n).$$

Apibrėžimas Vektoriaus $\alpha \in \mathcal{R}^n$ ir skaičiaus $k \in \mathcal{R}$ sandauga vadinsime vektorių

$$k\alpha = (ka_1, \ldots, ka_n).$$

Matome, kad pateiktų veiksmų atžvilgiu vektorių aibė $\mathcal{R}^n$ yra uždara. T.y. atlikdami šiuos vektorių veiksmus, gauname vektorių aibės elementus.

Veiksmų savybės.

1) Vektorių sudėtis yra komutatyvi:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Pastarasis tvirtinimas išplaukia iš realiųjų skaičių komutatyvumo (dėmenų keitimo vietomis) dėsnio ir sąryšių:

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) = (b_1 + a_1, \ldots b_n + a_n) = \beta + \alpha.$$

2) Samprotaudami analogiškai galime parodyti, kad sudėtis tenkina asociatyvumo (skliaustų perstatymo) dėsnį

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Vektorių, kurio visos koordinatės lygios nuliui, vadinsime nuliniu, ir žymėsime raide O.

Nesunku suprasti, kad bet kokiam vektoriui α teisinga lygybė:

3) $$\alpha + O = O + \alpha = a.$$

4) Bet kokiam vektoriui $\alpha \in \mathcal{R}^n$ galime nurodyti vektorių $\overline{\alpha}$ tokį, kad

$\alpha + \overline{\alpha} = O$. Vektorius $\overline{\alpha}$ vadinamas atvirkštiniu vektoriui α. Pasirodo, $\overline{\alpha} = -\alpha$. Parodysime, kiek vėliau, kad atvirkštinis vektorius yra vienintelis.

Akivaizdu, kad vektorius $(-1)\alpha + \alpha = O$. Taigi, jis yra atvirkštinis. Parodykime, kad jis vienintelis. Turime

$$\alpha + \overline{\alpha} = O.$$

Pridėję prie abiejų lygybės pusių vektorių $-\alpha$ gauname, kad

$$-\alpha + (\alpha + \overline{\alpha}) = -\alpha + O.$$

Antra vertus, iš paskutiniųjų lygybių išplaukia tokia lygybė:

$$O + \overline{\alpha} = -\alpha + O.$$

Dėka 3) savybės turime, kad $\overline{\alpha} = -\alpha$. Taigi, bet koks vektoriaus α atvirkštinis sutampa su vektoriumi $-\alpha$.

Žemiau pateiksime dar penkias veiksmų savybes, kurių įrodymus paliekame skaitytojui.

5) Visiems $\alpha \in \mathcal{R}$, $1 \cdot \alpha = \alpha$.

6) Vektoriaus ir realaus skaičiaus daugyba yra komutatyvi. T.y. $\forall k \in \mathcal{R}$, $\alpha \in \mathcal{R}^n$, $k \cdot \alpha = \alpha \cdot k$.

7) $\forall l, k \in \mathcal{R}, \alpha \in \mathcal{R}^n$

$$\big(l + k\big) \cdot \alpha = l \cdot \alpha + k \cdot \alpha \text{ ir } (lk) \cdot \alpha = l \cdot (k \cdot \alpha).$$

8) $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}^n$, $l \in \mathcal{R}$ teisinga lygybė:

$$l \cdot (\alpha + \beta) = l \cdot \alpha + l \cdot \beta.$$

Ateityje, aibę $\mathcal{R}^n$, su aukščiau apibrėžtomis vektorių lygybės, sudėties ir daugybos iš skaičiaus operacijomis, vadinsime $n-$ mačių vektorių erdve trumpai erdve $\mathcal{R}^n$.

3.2 Vektorių tiesinė priklausomybė

Apibrėžimas Sakykime, kad $l_i \in \mathcal{R}$, $\alpha \in \mathcal{R}^n$, $(i = 1, \ldots, m)$. Tuomet vektorių

$$\alpha = \sum_{j=1}^{m} l_j \alpha_j$$

vadinsime vektorių $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ tiesiniu dariniu.

Atkreipsime dėmesį, kad jei $l_i = 0$, $(i = 1, \ldots, m)$, tai $\alpha = O$. Pasirodo, kad atvirkščias teiginys, bendru atveju, nėra teisingas. T.y. tiesinis darinys gali būti nulinis vektorius, nors sumoje yra ir nenulinių dėmenų. Apie tai šiek tiek plačiau.

Apibrėžimas Vektorių rinkinį $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ vadinsime tiesiškai nepriklausomu, jeigu lygybė

$$\sum_{j=1}^{m} l_j \alpha_j = O$$

galima tada ir tik tada, kai $l_i = 0$, $(i = 1, \dots, m)$.

Priešingu atveju turime, kad darinys yra nulinis vektorius, nors tarp skaičių rinkinio l_i, $(i = 1, \dots, m)$ egzistuoja nenulinis skaičius. Šiuo atveju vektorių rinkinį vadinsime tiesiškai priklausomu.

Kaip praktiškai patikrinti ar duotasis vektorių rinkinys tiesiškai priklausomas ar ne? Tarkime duotas vektorių rinkinys $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Tuomet, kad patikrinti ar jis tiesiškai priklausomas ar ne mums reikia išspręsti lygtį:

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \alpha_j = O.$$

Tiksliau kalbant reikia išspręsti tiesinių lygčių sistemą. Jeigu ši sistema turi tik nulinį sprendinį, tai vektorių rinkinys tiesiškai nepriklausomas. Priešingu atveju rinkinys tiesiškai priklausomas.

Panagrinėkime, keletą pavyzdžių. Tarkime, kad duotas vektorių rinkinys

$$\alpha = (2, 1, 3),\ \beta = (0, 1, 0),\ \gamma = (2, 2, 3).$$

Patikrinkime, ar šis rinkinys tiesiškai prikklausomas ar ne. Remiantis apibrėžimu, mums reikia patikrinti, su kokiomis x_1, x_2, x_3 reikšmėmis galima lygybė

$$x_1\alpha + x_2\beta + x_3\gamma = \mathrm{O}.$$

Akivaizdu, kad jei $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ tai lygybė teisinga. Telieka atviras klausimas- ar ši lygybė yra teisinga ir su šiuo vieninteliu nuliniu rinkiniu ar nebūtinai?

Pasirodo, priklausomumo (nepriklausomumo) problema sprendžiama naudojant t.l. sistemas.

Užrašykime pateiktą sistemą tokia lygybe

$$x_1(2, 1, 3) + x_2(0, 1, 0) + x_3(2, 2, 3) = (0, 0, 0).$$

Atlikę vektorių veiksmus kairėje pusėje gauname tokią vektorinę lygybę:

$$(2x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, 3x_1 + 3x_3) = (0, 0, 0).$$

Žinome, kad du vektoriai lygūs, jei lygios šių vektorių atitinkamos koordinatės. Taigi,

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Gauname homogeninę t.l.sistemą.

Siūlome skaitytojui išspręsti šią sistemą ir įsitikinti, kad ši sistema turi begalo daug sprendinių, taigi tarp jų tikrai yra ir nenulinių. Vadinasi, duotasis vektorių rinkinys priklausomas.

Vektorių rinkinys bus tiesiškai nepriklausomas, jeigu nagrinėjama t.l.sistema bus trikampė. Tada ji turės vienintelį sprendinį, kuris bus nulinis.

Aptarsime sąlygas, kurios lemia ar nagrinėjamas vektorių rinkinys priklausomas ar ne.

1 **Teorema** Jei vektorių rinkinyje (tarkime $\{\alpha_1, \dots \alpha_m\}$) yra nulinis vektorius, tai šis rinkinys tiesiškai priklausomas.

$\ominus$

Tarkime, kad $\alpha_1 = O$. Imkime tokį realiųjų skaičių rinkinį: $l_1 = 1$, $l_i = 0$, $i = 2, \dots, n$. Tuomet

$$1 \cdot \alpha_1 + \sum_{i=2}^{m} 0 \cdot \alpha_i \equiv O.$$

Taigi, šis vektorių rinkinys tiesiškai priklausomas.

$\oplus$

2 **Teorema** Jei vektorių rinkinys $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ yra tiesiškai nepriklausomas, tai ir bet kuri šio rinkinio dalis $\{\alpha_{k_1}, \dots, \alpha_{k_j}\}$ yra tiesiškai nepriklausoma.

$\ominus$

Tarkime priešingai, t.y., kad rinkinys $\{\alpha_{k_1}, \dots, \alpha_{k_j}\} \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ yra tiesiškai priklausomas. Pažymėkime $I_j = \{k_1, \dots, k_j\}$, čia $I_j \subset \{1, \dots, m\}$. Kadangi rinkinys $\{\alpha_{k_1}, \dots, \alpha_{k_j}\}$ yra tiesiškai priklausomas, tai išplaukia, kad

$$\sum_{k \in I_j} l_k \alpha_k = O$$

ir $\exists j_0 \in I_j$ toks, kad $l_{j_0} \neq 0$. Viso rinkinio tiesinį darinį galime užrašyti taip:

$$\sum_{k \in I_j} l_k \alpha_k + \sum_{k \notin I_j} l_k \alpha_k = O,$$

čia $l_k = 0, k \notin I_j$. Taigi, nurodėme nenulinį rinkinį su kuriuo tiesinis darinys lygus nuliui. Vadinasi vektorių rinkinys yra tiesiškai priklausomas. Kadangi prielaida buvo klaidinga, tai išplaukia, kad teoremos tvirtinimas teisingas.

$\oplus$

3 **Teorema** Vektorių rinkinys $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ yra tiesiškai priklausomas tada ir tik tada, kai bent vienas rinkinio vektorius yra likusių tiesinis darinys.

$\ominus$ Tarkime, kad

$$\sum_{i=1}^{m} l_j \alpha_j = O$$

ir $\exists i_0 \in \{1, \dots, m\}, l_{i_0} \neq 0$. Tuomet naudodamiesi vektorių veiksmų taisyklėmis gauname:

$$\alpha_{i_0} l_{i_0} = -\sum_{\substack{i=1,\\ i\neq i_0}}^{m} l_i \alpha_i.$$

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad

$$\alpha_{i_0} = \sum_{i=1}^{m} -(\frac{l_i}{l_{i_0}})\alpha_i.$$

Paskutinioji lygybė reiškia, kad vienas rinkinio vektorius yra kitų tiesinis darinys.

Įrodysime atvirkštinį teiginį.

Tegu vienas vektorius yra likusių rinkinio vektorių tiesinis darinys, t.y.

$$\alpha_{i_0} = \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq i_0}}^{m} l_i \alpha_i.$$

Perrašę pastarąją lygybę

$$1 \cdot \alpha_{i_0} - \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq i_0}}^{m} l_i \alpha_i = O$$

matome, kad rinkinio $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ tiesinis darinys yra nulinis vektorius nors ne visi darinio koeficientai lygūs nuliui. Taigi rinkinys $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ tiesiškai priklausomas.

$\oplus$

4 **Teorema** Jeigu prie vektorių rinkinio $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ prijungsime vektorių

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_i,$$

tai vektorių rinkinys $\{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, bus tiesiškai priklausomas.

$\ominus$

Imkime konstantų rinkinį $l = 1, l_i = -c_i, (i = 1, \dots, m)$. Tuomet užrašę vektorių $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ tiesinį darinį su šiomis konstantomis, gauname

$$1 \cdot \alpha + \sum_{i=1}^{m} l_i \alpha_i = 1 \cdot \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{m} (-c_i)\alpha_i = O.$$

Akivaizdu, kad šis konstantų rinkinys nėra nulinis. Taigi, nagrinėjamasis vektorių rinkinys tiesiškai priklausomas.

$\oplus$

Tarkime, kad duoti trys vektoriai $\alpha = (1,2,3)$, $\beta = (0,1,1)$, $\gamma = \alpha + \beta = (1,3,4)$. Tada rinkinys α, β, γ yra tiesiškai priklausomas, kadangi

$$1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta + (-1) \cdot \gamma = \mathrm{O}.$$

Patikrinkite tai !

5 **Teorema** Jeigu, bet kuris rinkinio $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ vektorius yra rinkinio $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ vektorių tiesinis darinys, beje $k < m$, tuomet rinkinys $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ yra tiesiškai priklausomas.

$\ominus$

Laikykime, kad $\alpha_i \neq O, (i = 1, \ldots, m)$. Priešingu atveju išplaukia teoremos įrodymas.

Prie vektorių $\beta_1, \ldots, \beta_k$ prijunkime vektorių α_1. Žinome, kad jeigu rinkinyje yra bent vienas vektorius kitų vektorių tiesinis darinys tai tai šis rinkinys tiesiškai priklausomas (žr. 3 Teorema). Vadinasi

$$1 \cdot \alpha_1 + k \sum_{i=1} c_i \beta_i = O$$

ir bent vienas iš $c_i \neq 0, (i = 1, 2, \ldots m)$ (priešingu atveju $\alpha_1 = O$ ir teorema būtų įrodyta). Tegu $c_1 \neq 0$. Tuomet turime:

$$\beta_1 = -(\frac{1}{c_1})\alpha_1 - \sum_{i=2}^{k} (\frac{c_i}{c_1})\beta_i.$$

Taigi, vektorius β_1 yra vektorių $\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ tiesinis darinys. Tuo pačiu ir vektoriai $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ yra vektorių $\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ tiesiniai dariniai.

Prijunkime prie vektorių rinkinio $\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ vektorių α_2. Remdamiesi 3 Teorema gauname, kad šis rinkinys tiesiškai priklausomas. Tuomet

$$\alpha_2 + l_1\alpha_1 + \sum_{i=2}^{k} c_i \beta_i = O.$$

Pastebėsime, kad ne visi koeficientai $c_i = 0$, $(i = 2, \ldots, k)$ nes priešingu atveju gautume, kad vektoriai α_1, α_2 yra tiesiškai priklausomi ir teorema būtų įrodyta. Taigi, tarp konstantų c_i egzistuoja nenulinė. Tarkime, kad tai $c_2 \neq 0$. Tada

$$\beta_2 = -\frac{1}{c_2}\alpha_1 - \frac{l_2}{c_2}\alpha_2 - \sum_{i=3}^{k} (\frac{c_i}{c_2})\beta_2.$$

Iš pastarųjų lygybių išplaukia, kad ir vektoriai $\alpha_3, \ldots, \alpha_m$ yra vektorių $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \ldots, \beta_k$ tiesinis darinys.

Toliau elgiamės visiškai analogiškai: prie vektorių $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \ldots, \beta_k$ prijungiame vektorių α_3 ir t.t.

Atlikę $r \geq 2$ žingsnius gauname: a) arba vektoriai $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ yra tiesiškai priklausomi, taigi ir rinkinys $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ yra tiesiškai priklausomas ir teoremos įrodymas būtų baigtas arba b) vektoriai $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tiesiškai nepriklausomi ir vektoriai $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_m$ yra vektorių

$$\alpha_1, \ldots \alpha_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_k$$

tiesiniai dariniai. Jei $r = k$, tai vektoriai $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m$ yra vektorių $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tiesiniai dariniai. Tuomet, remdamiesi 3 Teorema gauname, kad rinkinys $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$ (tuo pačiu metu ir rinkinys $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$) yra priklausomi.

$\oplus$

3.3 Erdvės $\mathcal{R}^n$ bazė.

Sakykime, kad $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \in \mathcal{R}^n$. Be to tegu l_i, $(i = 1, \ldots, m)$ bet kokia realiųjų skaičių aibė. Tuomet laisvai parinktiems l_i, $(i = 1, \ldots, m)$ mes galime sudaryti vektorių

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} l_i \alpha_i. \tag{3.8}$$

Kyla klausimas, ar egzistuoja erdvėje $\mathcal{R}^n$ vektorių rinkinys $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, kad tinkamai parinkę skaičius l_i, $(i = 1, \ldots, m)$ tiesinio darinio (3.8) vektoriais galėtume išreikšti bet kokį erdvės vektorių?

Visų pirma parodysime, kad apskritai egzistuoja vektorių rinkinys, erdvėje $\mathcal{R}^n$, toks, kad tinkamai parinkę tiesinio darinio koeficientus, minėtųjų vektorių pagalba galima išreikšti, bet kokį erdvės vektorių. Tarkime duotas $n-$ mačių vektorių rinkinys :

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots 0),\ \ldots e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1). \tag{3.9}$$

Nesunku matyti, kad šis rinkinys tiesiškai nepriklausomas. Įrodykite!

Tarkime, kad $e_1, e_2 \in \mathcal{R}^2$, t.y. $e_1 = (1, 0)$ ir $e_2 = (0, 1)$. Imkime šios erdvės vektorių $\alpha = (2, -11)$. Nesunku suprasti, kad

$$(2, -11) = 2(1, 0) + (-11)(0, 1).$$

Rašant trumpai, $\alpha = 2e_1 - 11e_2$.

Imkime bet kokį $n-$matį vektorių $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Aišku, kad

$$\alpha = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

Matome, kad koks bebūtų vektorius $\alpha \in \mathcal{R}^n$ visuomet galime šį vektorių užrašyti (2) vektorių tiesiniu dariniu. Tad kokiomis savybėmis turi pasižymėti erdvės vektorių rinkinys, kad šio rinkinio vektorių tiesiniais dariniais galėtume užrašyti visus erdvės vektorius?

Apibrėžimas Tiesiškai nepriklausomų vektorių rinkinį $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, vadinsime erdvės $\mathcal{R}^n$ baze, jeigu bet koks šios erdvės vektorius yra vektorių $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ tiesinis darinys, t.y.

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} l_i \alpha_i.$$

6 **Teorema** Kiekvieną erdvės $\mathcal{R}^n$ bazę sudaro lygiai n vektorių.

$\ominus$

Sakykime, kad $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ yra bazė. Kadangi kiekvienas vektorius α_i $(i = 1, \dots, m)$ yra vektorių $e_1, \dots, e_n$ tiesinis darinys (tai jau esame parodę), visų pirma laikydami, kad $m > n$ ir remdamiesi 5 teorema gauname, kad rinkinys $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ yra tiesiškai priklausomas. Bet tai prieštarauja teoremos prielaidai, kadangi $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ yra bazė. Vadinasi $m \leq n$. Tarkime, kad $m < n$. Kadangi $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ yra bazė, tai bet kuris vektorius $e_j, (j = 1, \dots, n)$ yra vektorių α_i, $(i = 1, \dots, m)$ tiesinis darinys. Apeliuodami į 5 Teoremą gauname, kad rinkinys e_j, $(j = 1, \dots, n)$ yra tiesiškai priklausomas. Bet jau žinome, kad šis rinkinys tiesiškai nepriklausomas. Tad prielaida, jog $m < n$ neteisinga ir telieka atvejis $m = n$.

$\oplus$

Teisinga tokia

7 **Teorema** Bet koks n tiesiškai nepriklausomų vektorių rinkinys yra erdvės $\mathcal{R}^n$ bazė.

$\ominus$

Tarkime, kad rinkinys $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ tiesiškai nepriklausomas. Tuomet koks bebūtų vektorius $\alpha \in \mathcal{R}^n$, rinkinys $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ yra tiesiškai priklausomas. Kodėl? Bet tuomet teisingas sąryšis

$$l\alpha + \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j = O,$$

čia $l \neq 0$. (Jei būtų $l = 0$ tai rinkinys $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ būtų tiesiškai priklausomas.) Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} -(\frac{c_i}{l})\alpha_j.$$

Kadangi vektorius buvo parinktas laisvai, tai išplaukia, kad $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ yra bazė.

$\oplus$

Sakykime, kad $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ yra erdvės $\mathcal{R}^n$ bazė. Tuomet, bet kokiam erdvės elementui α egzistuoja realių skaičių rinkinys l_j, $\quad (j = 1, \dots, n)$, toks, kad

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} l_j \alpha_j.$$

Skaičius l_j, $(j = 1, \dots, n)$ vadinsime vektoriaus α koordinatėmis bazėje $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Skirtingose bazėse vektorius turi skirtingas koordinates, tačiau fiksuotoje bazėje vektoriaus koordinatės nusakomos vieninteliu būdu. Įrodysime tai.

8 **Teorema** Vektoriaus koordinatės duotoje bazėje nusakomos vieninteliu būdu.

$\ominus$

Tarkime priešingai, t.y vektorių α bazėje $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ galime išreikšti bent jau dvejopai:

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} l_j \alpha_j \text{ ir } \alpha = \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j.$$

Paskutiniąsias lygybes atėmę vieną iš kitos panariui, gausime

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} (l_j - c_j)\alpha_j = O.$$

Iš pastarosios lygybės išplaukia, kad $l_j - c_j = 0$, arba $l_j = c_j, (j = 1, \ldots, n)$ (priešingu atveju rinkinys $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ nebūtų bazė).

$\oplus$

Įsitikinę, kad vektorių rinkinys

$$\alpha = (1, 2, 3), \quad \beta = (1, 1, 0), \quad \gamma = (0, 1, 2)$$

yra bazė, raskime vektoriaus $\delta = (1, 4, 8)$ koordinates šioje bazėje.

Naudojant Gauso metodą, galime iš karto spręsti du uždavinius

1) nustatyti ar vektorių rinkinys yra nepriklausomas;

2) rasti vektoriaus koordinates šioje bazėje.

Norint atlikti šią užduotį mums teks išspręsti tokią lygtį

$$\gamma = x_1 \alpha + x_2 \beta + x_3 \gamma.$$

Perrašykime šią lygtį naudodami vektorių veksmus. Įrašę konkrečius vektorius gauname, kad

$$(1, 4, 8) = x_1(1, 2, 3) + x_2(1, 1, 0) + x_3(0, 1, 2)$$

Taikydami vektorių veiksmų savybes gauname lygybę:

$$(1, 4, 8) = (x_1, 2x_1, 3x_1) + (x_2, x_2, 0) + (0, x_3, 2x_3)$$

arba sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Perrašę šią sistemą matriciniu būdu gauname

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & |1 \\ 2 & 1 & 1 & |4 \\ 3 & 0 & 2 & |8 \end{pmatrix}.$$

Pastebėsime, kad vektorių koordinates į matricą perrašome stulpeliais.

Ši sistema turės vienintelį sprendinį (tuo pačiu rinkinys bus bazė), jeigu gausime trikampę t.l.s. Išspręskime sistemą.

Atlikę matricos eilučių veiksmus $-2L_1 + L_2$ ir $-3L_1 + L_3$ gauname tokią t.l.sistemos matricą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & |1 \\ 0 & -1 & 1 & |2 \\ 0 & -3 & 2 & |5 \end{pmatrix}.$$

Sudėję $-3L_2 + L_3$ turėsime

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & |1 \\ 0 & -1 & 1 & |2 \\ 0 & 0 & -1 & |-1 \end{pmatrix}.$$

Paskutiniosios trikampės sistemos sprendinys yra toks:

$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1.$

Kadangi sprendinys vienintelis, tai vektorių δ nurodytais vektoriais išreiškiame vieninteliu būdu. Dar daugiau, vektorių rinkinys α, β, γ yra bazė (patikrinkite), o vektoriaus δ koordinatės šioje bazėje yra $(2, -1, 1)$.

Apibrėžimas *Vektorinės erdvės dimensija vadinsime šios erdvės bazės vektorių skaičių.*

Apibrėžimas *Tarkime, kad $V \subset \mathcal{R}^n$. Aibę V vadinsime erdvės $\mathcal{R}^n$ poerdviu, jeigu*

1. $\mathrm{O} \in V$;
2. jei $k \in \mathcal{R}$ ir $\alpha \in V$, tai vektorius $k\alpha \in V$;
3. $\alpha, \beta \in V$, tai ir $\alpha + \beta \in \mathcal{V}$.

Poerdvio dimensija vadinsime didžiausią, nepriklausomų vektorių skaičių, šiame poerdvyje. Beje, šis vektorių rinkinys bus vadinamas poerdvio baze.

Sudarykime kokį nors trimatės erdvės poerdvį ir nustatykime jo dimesiją ir bazę. Tarkime duotas vektorių rinkinys

$$\alpha_1 = (2, 1, 3),\ \beta = (0, 1, 0),\ \gamma = (2, 2, 3).$$

Tada aibė

$$V = \{\theta; \theta = l_1\alpha + l_2\beta + l_3\gamma,\ l_1, l_2, l_3 \in \mathcal{R}\},$$

kurią sudaro vektoriai, gaunami sudarant visus galimus tiesinius vektorių α, β, γ darinius, yra erdvės $\mathcal{R}^3$ poerdvis. Įsitikinkite patys!

3.4 Vektorių rinkinio rangas

Remdamiesi 3.3 skyrelio 3 Teorema gauname, kad vektorių rinkinys yra tiesiškai priklausomas tada ir tik tada, kai bent vienas rinkinio vektorius yra kitų vektorių tiesinis darinys. Nurodysime charakteristiką, kuria bus nusakomas nepriklausomų vektorių skaičius rinkinyje.

Apibrėžimas Skaičius r vadinamas vektorių rinkinio $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ rangu, jeigu šiame rinkinyje galime nurodyti r tiesiškai nepriklausomų vektorių $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\} \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ tokių, kad bet kuris vektorių rinkinys iš $r+1$ vektoriaus $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{r+1}}\} \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ yra tiesiškai priklausomas.

Kitaip tariant, rinkinio rangas yra maksimalus, tiesiškai nepriklausomų vektorių skaičius, duotame rinkinyje. Pastebėsime, kad rinkinio $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ rangas $r \leq \min\{m, n\}$, $\alpha_i \in \mathcal{R},\ i = 1, \dots n$.

Apibrėžimas Du tos pat erdvės vektorių rinkiniai $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ ir $\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ vadinami ekvivalenčiais, jeigu bet kurį pirmojo rinkinio vektorių galima išreikšti antrojo rinkinio vektorių tiesiniu dariniu ir atvirkščiai.

9 **Teorema** Jeigu vektorių rinkinio $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ rangas r, tai šiame rinkinyje yra lygiai r tiesiškai nepriklausomų vektorių, kurių tiesiniais dariniais galime išreikšti bet kurį rinkinio $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ vektorių.

$\ominus$

Naudodamiesi rango apibrėžimu turime, kad egzistuoja r tiesiškai nepriklausomų vektorių rinkinys, tarkime $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\}$. Papildykime šį rinkinį, bet kuriuo rinkinio $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ vektoriumi, tarkime α_i, $(i = 1, \dots, m)$. Tada naujasis vektorių rinkinys bus tiesiškai priklausomas. (Kodėl?). Taigi,

$$\alpha_i = \sum_{l=1}^{r} c_l \alpha_{i_l},$$

ir $\exists c_i \neq 0$, $(i = 1, \dots r)$. Tuo ir baigiame įrodymą.

$\oplus$

10 **Teorema** Ekvivalenčių vektorių rinkinių rangai yra lygūs.

$\ominus$

Sakykime, kad r yra vektorių rinkinio $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ rangas, o vektoriai $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ tiesiškai nepriklausomi. Remdamiesi paskutiniąja teorema gauname, kad

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{r} c_{ij} \alpha_j,\ (i = 1, \dots, m). \tag{3.10}$$

Tegu p yra vektorių rinkinio $\{\beta_1, \dots \beta_k\}$ rangas, o šio rinkinio vektoriai $\{\beta_1, \dots, \beta_p\}$ tiesiškai nepriklausomi.

Remdamiesi tuo, kad vektorių rinkiniai ekvivalentūs galime užrašyti:

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ji}\alpha_i,\ (j = 1, \ldots, k).$$

Iš paskutiniosios lygybės, pasinaudoję (3.10) gauname

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{m} b_{ji} \sum_{s=1}^{r} c_{is}\alpha_s = \sum_{s=1}^{r} \big(\sum_{i=1}^{m} b_{ji}c_{is}\big)\alpha_s,\ (j = 1, \ldots, k).$$

Bet tuomet, vektoriai $\{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$ yra vektorių $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ tiesiniai dariniai. Padarę prielaidą, kad $r < p$, bei remdamiesi 5. Teorema gauname, kad vektoriai $\beta_1, \ldots, \beta_p$ yra tiesiškai priklausomi. Tai prieštarauja prielaida, kad pasirinkti vektoriai nepriklausomi. Taigi, $p \le r$. Bet, antra vertus,

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{p} d_{ji}\beta_i,\ j = (1, \ldots, k)$$

ir

$$\alpha_l = \sum_{i=1}^{k} t_{li}\beta_i,\ (l = 1, \ldots, m)$$

arba

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{p} \big(\sum_{s=1}^{k} d_{is}t_{sj}\big)\beta_j,\ (i = 1, \ldots, m).$$

Taigi, vektoriai $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ yra vektorių $\beta_1, \ldots, \beta_p$ tiesiniai dariniai. Jeigu $p < r$, tai iš 5 Teoremos išplaukia prieštaravimas. Taigi belieka vienintelis galimas atvejis $p = r$. Analogiškus samprotavimus naudodami rinkiniui $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ gauname teoremos įrodymą.

$\oplus$

3.5 Vektorių rinkinio elementarieji pertvarkiai

Vektorių rinkinio elementariaisiais pertvarkiais vadiname:
1) vektorių keitimą vietomis rinkinyje;
2) vektoriaus dauginimą iš nelygaus nuliui skaičiaus;
3) dviejų rinkinio vektorių sudėtį.

11 **Teorema** Elementariaisiais pertvarkiais vektorių rinkinį pertvarkome į jam ekvivalentų rinkinį.

$\ominus$

Šio teiginio įrodymą paliekame skaitytojui.
Išvada. Vektorių elementarieji pertvarkiai nekeičia rinkinio rango.
Pastarasis tvirtinimas išplaukia iš paskutiniųjų dviejų teoremų.

Iš paskutiniosios išvados išplaukia, kad ekvivalenčiuose rinkiniuose yra vienodas tiesiškai nepriklausomų vektorių skaičius.

Iki šiol mes kalbėjome apie erdvės $\mathcal{R}^n$ elementus, kuriuos vadinome vektoriais. Beje, kadangi realieji skaičiai sudarantys šiuos rinkinius surašyti eilute, tai dažnai jie vadinami vektoriais eilutėmis.

Apibrėžimas Sutvarkytą realiųjų skaičių rinkinį

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_k \end{pmatrix}$$

vadinsime $k-$ mačiu vektoriumi stulpeliu. Skaičiai $a_i,\ (i = 1, \dots, k)$ yra vadinami vektoriaus stulpelio koordinatėmis.

Norėdami atskirti vektorius stulpelius nuo kitų vektorių juos žymėsime α^*. Vektorių stulpelių veiksmai yra analogiški vektorių eilučių veiksmams. Sakysime, kad du vektoriai stulpeliai lygūs, jeigu jų atitinkamos koordinatės sutampa. Tegu

$$\alpha^* = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_k \end{pmatrix}, \quad \beta^* = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Tada šių vektorių suma vadinsime vektorių

$$\gamma^* = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_k + b_k \end{pmatrix}.$$

Vektoriaus α^* ir skaičiaus $l \in \mathcal{R}$ sandauga vadinsime vektorių

$$l\alpha^* = \begin{pmatrix} la_1 \\ la_2 \\ \dots \\ la_k \end{pmatrix}.$$

Apibrėžimas Operaciją, kuri $k-$ matį vektorių stulpelį keičia $k-$ mačiu vektoriu eilute arba atvirkščiai, vadinsime vektorių trasponavimu, būtent

$$\alpha^{*T} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}^T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} = \alpha$$

ir atvirkščiai,

$$\alpha^T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \alpha^*.$$

Transponavimo operacija turi tokias savybes:

1) $$\big(\alpha+\beta\big)^T = \alpha^T + \beta^T;$$

2) $$\big(l\alpha\big)^T = l\alpha^T.$$

Šios savybės išplauka iš tokių sąryšių:

$$\big(\alpha+\beta\big)^T = \big(a_1+b_1,\dots,a_m+b_m\big)^T = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \dots \\ a_m+b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix},$$

ir

$$\big(\alpha\big)^T = \big(la_1,\dots,la_m\big)^T = \begin{pmatrix} la_1 \\ \dots \\ la_m \end{pmatrix} = l\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix} = l\alpha^T.$$

Jeigu transponuotume visus erdvės $\mathcal{R}^m$ elementus, tai gautume transponuotų vektorių aibę, kurios elementai turi analogiškas savybes kaip ir erdvės $\mathcal{R}^m$ vektoriai. Tad natūralu transponuotų vektorių aibę vadinti trasponuotų vektorių erdve ir žymėti $\mathcal{R}^{mT}$. Beje, pastebėsime, kad visi teiginiai, kurie buvo įrodyti vektoriams eilutėms, teisingi ir transponuotų vektorių erdvėje.

3.6 Vektorių ir tiesinių lygčių sistemų ryšys

Pažymėkime

$$\beta_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix},\ (j=1,\dots,n),\ \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Sudarykime vektorinę lygtį

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\beta_j = \beta. \tag{3.11}$$

Iš pastarosios vektorinės lygties (prisiminkite vektorių lygybės savybę) gauname tiesinių lygčių sistemą

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ (i=1,\dots,m). \tag{3.12}$$

Vektorius β yra vadinamas laisvųjų narių stulpeliu, o vektoriai $\beta_j,\ (j=1,\dots,n)$, vadinami lygčių sistemos vektoriais stulpeliais.

Matome, kad tiesinių lygčių sistemą galime užrašyti naudodamiesi vektorine lygtimi. Kyla klausimas- kaip yra susiję vektorių savybės ir tiesinių lygčių sistemų suderinamumo problema?

Pasirodo, kad teisinga tokia

12 **Teorema** (3.11) tiesinių l.s. yra suderinta tada ir tik tada kai vektorius β yra tiesinis, vektorių β_j, $(j = 1, \dots, n)$, darinys.

$\ominus$

Sakykime, kad

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} l_j \beta_j, \text{ kur } l_j \in \mathcal{R}, \ (j = 1, \dots, n).$$

Nesunku suprasti, kad pastaroji lygybių sistema reiškia 3.12 lygčių sistemą, kuomet nežinomųjų vietoje įrašytas realiųjų skaičių rinkinys $l_1, \dots, l_n$. Taigi, paskutinysis rinkinys yra lygčių sistemos 3.12 sprendinys.

Atvirkščiai. Tarkime, kad 3.12 sistema turi sprendinį $t_1, \dots, t_n$. Tuomet

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j = b_i, \ (i = 1, \dots, m).$$

Bet paskutinioji lygybė reiškia, kad vektorius β yra vektorių $\beta_1, \dots, \beta_n$ tiesinis darinys, kadangi

$$\sum_{j=1}^{n} t_j \beta_j = \beta.$$

$\oplus$

Pademonstruosime šią teoremą konkrečiu pavyzdžiu. Tarkime, kad duota t.l.sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ -3x_2 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Šią sistemą perrašykime vektorine forma

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pastebėsime, kad rinkinys $(1, 0, 2)$ yra t.l. sistemos sprendinys. Be tuo pat metu teisinga vektorinė lygybė (patikrinkite)

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

13 **Teorema** Tiesinių, homogeninių lygčių sistema turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai jos koeficientų vektoriai stulpeliai yra tiesiškai priklausomi.

$\ominus$

Tarkime iš pradžių, kad stulpeliai tiesiškai priklausomi, t.y.

$$\sum_{j=1}^{n} l_j\beta_j = O,\ (l_1,\dots,l_n) \neq O.$$

Bet tuomet rinkinys $(l_1,\dots,l_n)$ yra sistemos

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0,\ (i = 1,\dots,m)$$

nenulinis sprendinys.

Atvirkščiai, tarkime, kad sistema turi nenulinį sprendinį $(l_1,\dots,l_n)$ t.y., bent viena sprendinio komponentė $l_i \neq 0, (i = 1,\dots,m)$. Tuomet teisingos lygybės

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}l_j = 0,\ (i = 1,\dots,m).$$

Iš pastarojo sąryšio išplaukia, kad vektoriai stulpeliai $\beta_1,\dots,\beta_n$ yra tiesiškai priklausomi.

$\oplus$

14 **Teorema** $n-$ mačių vektorių eilučių
$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12},\dots,a_{1n}),\ \alpha_2 = (0, a_{22},\dots,a_{2n})\ \dots,$
$\alpha_r = (0,\dots,0, a_{rr},\dots,a_{rn}),\ a_{ii} \neq 0$, rangas yra lygus r.
Analogiškai, $m-$mačių vektorių stulpelių

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \dots\beta_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ a_{rr} \\ \dots \\ a_{mr} \end{pmatrix}$$

$a_{ii} \neq 0, (i = 1,\dots,r)$ rangas yra lygus r.

$\ominus$

Norint įrodyti teoremą mums pakanka parodyti, kad nagrinėjami vektoriai eilutės, arba stulpeliai, yra tiesiškai nepriklausomi. O tai reikš, kad r vektorių rinkinyje maksimalus tiesiškai nepriklausomų vektorių skaičius yra r.

Tarkime, kad tiesinis vektorių darinys yra nulinis vektorius, t.y.

$$\sum_{i=1}^{r} x_i\alpha_i = O.$$

Šią lygybę galime perrašyti ir taip:

$$\big(x_1a_{11}, x_1a_{12}+x_2a_{22}, x_1a_{13}+x_2a_{23}+x_3a_{33}, \ldots, x_1a_{1n}+\ldots+x_ra_{rn}\big) =$$

$\overbrace{(0,\ldots,0)}^{r}$.

Naudodamiesi vektorių lygybe gauname

$$\begin{cases} x_1a_{11} = 0, \\ x_1a_{12}+x_2a_{22} = 0, \\ x_1a_{13}+x_2a_{23}+x_3a_{33} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_1a_{1n}+\ldots+x_ra_{rn} = 0. \end{cases}$$

Iš paskutiniosios lygčių sistemos išplaukia, kad $x_1 = \ldots = x_r = 0$. Taigi, nagrinėjamas vektorių rinkinys tiesiškai nepriklausomas ir jo rangas lygus vektorių skaičiui, arba tiesiog lygus r.

$\oplus$

Tarkime, kad duota tiesinių lygčių sistema

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ (i = 1,\ldots,m).$$

Surašę šios sistemos koeficientus tokiu būdu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & .. & \ldots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

gausime stačiakampę skaičių lentelę, kurią vadinsime tiesinių lygčių sistemos koeficientų matrica. Beje, atkreipsime skaitytojo dėmesį, kad šios matricos eilutes arba stulpelius galime interpretuoti kaip vektorius eilutes arba stulpelius, atitinkamai.

Apibrėžimas Matricos eilučių (stulpelių) rangu vadinsime šios matricos eilučių (stulpelių) pagalba sudarytų vektorių eilučių (stulpelių) rangą.

13 Teoremos dėka gauname, kad matricos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{rr} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix}, a_{ii} \neq 0\ i = 1,\ldots,r$$

rangas lygus r.

Apibrėžimas Matricos elementariaisias pertvarkiais vadinsime jos eilučių arba stulpelių elementariuosius pertvarkius.

15 **Teorema** Bet kokią, nenulinę matricą, elementariaisiais pertvarkiais galime pertvarkyti į matricą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

kurios pirmose r eilutėse ir r stulpeliuose yra lygiai r vienetų (kiekvienoje po vieną), $r \leq \min(m, n)$.

$\ominus$

Tarkime, kad duota matrica

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Laikykime, kad $a_{11} \neq 0$. Priešingu atveju sukeitę eilutes vietomis galime pasiekti, kad pirmoje eilutėje, pirmasis koeficientas būtų nelygus nuliui. Na, o jeigu visi $a_{i1} = 0$, $(i = 1, \dots, m)$ tai keisdami eilutes ir stulpelius vietomis galime pasiekti, kad pradinė prielaida būtų išpildyta. Prisiminkime, kad elementarieji pertvarkiai nekeičia vektorių rinkinių rangų! Elgsimės panašiai kaip ir spręsdami tiesines lygčių sistemas Gauso metodu.

Pridėkime prie $i-$osios eilutės pirmąją eilutę padaugintą iš skaičiaus $-a_{i1}/a_{11}$, $i = 2, \dots, m$. Gausime matricą

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)}. \end{pmatrix}$$

Tegu $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (priešingu atveju elgsimės kaip ir pirmąjame žingsnyje). Prie paskutiniosios matricos $i-$osios eilutės $i = 3, \dots, m$ pridedame antrąją eilutę padaugintą iš daugiklio $-a_{i1}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ ir gauname,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(2)} & \dots & a_{mn}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Elgdamiesi analogiškai, atlikę $r - 1$ žingsnį gauname tokią matricą:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \dots & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{rr}^{(r-1)} & \dots & a_{rn}^{(r-1)} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Tuo atveju, kai $r = m$, nulinių eilučių matricoje nebus. Toliau, visiškai analogiškai pertvarkydami paskutiniosio matricos stulpelius gausime

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & b_{rr} & 0\dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Teoremos įrodymą gausime, jeigu $i-$ąją eilutę (stulpelį) padauginsime iš $1/b_{ii}$
$\oplus$
Iš paskutiniosios teoremos išplaukia, kad matricos stulpelių bei eilučių rangai sutampa. Todėl natūralu matricos eilučių arba stulpelių rango neskirti, ir šiuos abu rangus vadinti tiesiog matricos rangu.

Šis algoritmas sudaro prielaidas ne tik nustatyti rinkinio rangą, bet ir nustatyti, kurie vektoriai yra nepriklausomi.

Tarkime, kad duotas toks vektorių rinkinys:

$$\alpha_1 = (2, 1, 1, 0), \;\; \alpha_2 = (-1, 1, 1, -1), \;\; \alpha_3 = (1, 2, 2, -1), \;\; \alpha_4 = (0, 3, 3, -2).$$

Raskime šio vektorių rinkinio rangą, bei nustatykime, kurie vektoriai yra nepriklausomi.

Surašykime šiuos vektorius eilutėmis į matricą. Gauname

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & (v_1) \\ -1 & 1 & 1 & -1 & (v_2) \\ 1 & 2 & 2 & -1 & (v_3) \\ 0 & 3 & 3 & -2 & (v_4) \end{pmatrix}.$$

Pasirinkę trečią eilutę generaline, ir atlikę veiksmus $v_3 + v_2$, $-2v_3 + v_1$ bei sukeitę trečią eilutę su pirmąja gauname matricą

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & (v_3) \\ 0 & 3 & 3 & -2 & (v_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (v_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (v_4) \end{pmatrix}.$$

Gavome matricą, kuri turi trapecinę formą, kurioje dvi nenulinės eilutės. Taigi vektorių rinkinio rangas (maksimalus nepriklausomų vektorių skaičius rinkinyje) yra lygus 2. Dar daugiau, nepriklausomų vektorių porą sudaro v_1 ir v_3 vektoriai. Atkreipsime skaitytojo dėmesį, kad nepriklausomų vektorių pora galėjo būti ir kita, jei būtume kita seka atlikę veiksmus.

Iš paskutiniosios teoremos išplaukia, kad matricos stulpelių bei eilučių rangai sutampa. Todėl natūralu matricos eilučių arba stulpelių rango neskirti, ir šiuos abu rangus vadinti tiesiog matricos rangu.

3.7 **Tiesinių lygčių sistemų suderinamumo sąlygos**

Tarkime, kad duota tiesinių lygčių sistema

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ (i = 1, \ldots, m).$$

Tegu kaip ir aukščiau

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & |b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & |b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & |b_n \end{pmatrix}.$$

Tada teisinga tokia teorema:

16 **Teorema**(Kronekerio - Kapelio) Tiesinių lygčių sistema yra suderinta tada ir tik tada, kai $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}B$.

$\ominus$

Visų pirma tarkime, kad t.l.s. yra suderinta. Tuomet egzistuoja realiųjų skaičių rinkinys $(l_1, \ldots, l_n)$ su kuriuo teisinga lygybė:

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} l_j\beta_j,$$

kur β yra lygčių sistemos laisvųjų narių stulpelis, o β_j, $(j = 1, \ldots, n)$ yra t.l. sistemos koeficientų stulpelis prie nežinojojo x_j.

Antra vertus, paskutinioji lygybė reiškia, kad vektorius β yra vektorių $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tiesinis darinys. Tarkime, kad $\mathrm{rang}A = r$. Tuomet egistuoja šiame vektorių rinkinyje r tiesiškai nepriklausomų vektorių, tarkime

$$\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_r}.$$

Vadinasi $\forall\beta_j,\ j \notin I_r := \{j_1, \ldots, j_r\}$ teisingos lygybės

$$\beta_j = \sum_{k=1}^{r} c_{jj_k}\beta_{j_k} \ (j = 1, \ldots, n).$$

Naudodamiesi paskutiniosiomis lygybėmis lygčių sistemą perrašome taip:

$$\beta = \sum_{j=1, j\notin I_r}^{n} l_j \big(\sum_{k=1}^{r} c_{jj_k}\beta_{j_k} \big) + \sum_{k=1}^{r} l_{j_k}\beta_{j_k} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1,j\notin I_r}^{n} l_j c_{jj_k}\beta_{j_k} +$$

$$\sum_{k=1}^{r} l_{j_k}\beta_{j_k} = \sum_{k=1}^{r} \big(\sum_{j=1,j\notin I_r}^{n} l_i c_{jj_k} + l_{j_k} \big)\beta_{j_k} = \sum_{k=1}^{r} a_k\beta_{j_k},$$

čia $a_k = \sum\limits_{j=1,j\notin I_r}^{n} l_i c_{jj_k} + l_{j_k}$. Iš paskutiniųjų lygybių išplaukia, kad vektorius β yra vektorių $\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_r}$ tiesinis darinys, bet tuomet vektorių $\beta, \beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_r}$ rinkinys yra tiesiškai priklausomas ir jo rangas taip pat yra r. Taigi rang$A$ = rang$B = r$.

Įrodysime atvirkščią teiginį. Tarkime, kad $\beta_{j_1}, \ldots \beta_{j_r}$ koks nors nepriklausomų vektorių stulpelių rinkinys matricoje B. Matricos B rangas lygus r, tai rinkinys $\beta, \beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_r}$ yra tiesiškai priklausomas. Taigi, egzistuoja nenulinis realiųjų skaičių rinkinys $l, c_{j_1}, \ldots, c_{j_r}$ toks, kad teisinga lygybė:

$$l\beta + \sum_{k=1}^{r} c_{j_k}\beta_{j_k} = O.$$

Be to pastebėkime, kad $l \neq 0$ (kodėl?). Tuomet iš pastarosios lygybės išplaukia

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} d_j\beta_j,$$

čia

$$d_j = \begin{cases} 0, \ j \notin I_r, \\ -c_{j_k}/l, \ j \in I_r. \end{cases}$$

Bet pastaroji lygybė reiškia, kad t.l.s yra suderinta, dar daugiau, nurodėme ir jos sprendinį.

$\oplus$

17 **Teorema** Tiesinių lygčių sistema apibrėžta, kai rang$A$ =rang$B$ =n ir neapibrėžta, kai rang$A$ =rang$B < n$.

$\ominus$

Aišku, kad rang$A$ =rang$B$ =n gali būti tik tuo atveju, kai $m \geq n$. Bet tuomet t.l.s. stulpeliai tiesiškai nepriklausomi. Šiuo atveju tarkime priešingai, t.y. egzistuoja bent du sprendiniai tokie, kad

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\beta_j = \beta \ \text{ ir } \ \sum_{j=1}^{n} d_j\beta_j = \beta.$$

Tuomet

$$\sum_{j=1}^{n}\big(c_j-d_j\big)\beta_j=O.$$

Kadangi vektorių rinkinys nepriklausomas, tai pastaroji lygybė galima tik su nuliniais koeficientais. Taigi $c_j = d_j,\ (j = 1,\ldots,n)$. Vadinasi sprendinys vienintelis.

Įrodysime antrąją teoremos dalį. Tarkime, kad rang B=rang$A < n$. Taigi, vektorių $\beta_1,\ldots,\beta_n$ rinkinys yra tiesiškai priklausomas (kodėl?). Tuomet egzistuoja nenulinis realių skaičių rinkinys $t_1,\ldots,t_n$ toks, kad

$$\sum_{j=1}^{n} t_j\beta_j=O.$$

Kadangi lygčių sistemos matricos ir išplėstinės t.l.s. matricos rangai sutampa, tai sistema turi sprendinį, sakykime $l_1,\ldots,l_n$. Tuomet teisinga lygybė

$$\sum_{j=1}^{n} l_j\beta_j=\beta.$$

Pastarųjų dviejų lygybių dėka gauname, kad

$$\sum_{j=1}^{n}\big(l_j+t_j\big)\beta_j=\beta.$$

Matome, kad rinkinys $(t_1+l_1,\ldots;t_n+l_n)$ yra kitas sistemos sprendinys. Taigi, šiuo atveju rinkinys turi ne vienintelį sprendinį. Tuo baigiame teoremos įrodymą.

$\oplus$

18 **Teorema** Tiesinių homogeninių lygčių sistema turi ne nulinį sprendinį tada ir tik tada, kai matricos rangas $< k$, čia $k = \min(m,n)$, n stulpelių, o m eilučių skaičius.

$\ominus$

Įrodymą paliekame skaitytojui.

$\oplus$

Tiesinės homogeninės lygčių sistemos, kurioje m lygčių ir n nežinomųjų yra erdvės $\mathcal{R}^n$ tiesinis poerdvis.

Tarkime, kad duota $m-$ lygčių su n nežinomaisiais homogeninė t.l.sistema. Tada, šios lygties sprendiniai, sudaro erdvės $\mathcal{R}^n$, poerdvį, kurio dimensija $n-r$, čia r yra homogeninės t.l.sistemos matricos A rangas. Aptarsime, kaip rasti šio poerdvio bazę. Sakykime, kad duota homogeninė t.l.sistema.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ ,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Pertvarkę šią sistemą į trapecinę gauname

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\
\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\qquad\qquad a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n = 0,
\end{cases}
$$

čia $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, \ldots r)$ ir $r \leq n$.

Spręsdami šią sistemą gauname šios sistemos bendrąjį sprendinį

$$(l_1', \ldots, l_r', x_{r+1}, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathcal{R}, i = r+1, \ldots, n.$$

Parinkę nežinomųjų $x_{r+1}, \ \ldots, x_n$ vietoje skaičius t_i, $i = r+1, \ldots, n$, gauname sistemos atskirąjį sprendinį. Taigi, šiuo atveju t. l. sistema turi begalo daug sprendinių.

Homogeninės sistemos atskirąjį sprendinį galime traktuoti, kaip erdvės $\mathcal{R}^n$ elementą. Sudarykime $n-r$ atskirų šios sistemos sprendinių, laisvuosius nežinomuosius pasirinkdami tokiu būdu:

$x_{r+1}^1 = 1,\ x_{r+2}^1 = 0 \ldots x_n^1 = 0,$
$x_{r+1}^2 = 0,\ x_{r+2}^2 = 1 \ldots x_n^2 = 0,$
$x_{r+1}^3 = 0,\ x_{r+2}^3 = 0,\ x_{r+3}^3 = 1, \ldots x_n^3 = 0,$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$x_{r+1}^n = 0,\ x_{r+2}^n = 0,\ x_{r+3}^n = 1, \ldots x_n^3 = 1.$

Gausime tokius atskiruosius sprendinius:

$$\big(x_1^1(1,0,\ldots,0), x_2^1(1,0,\ldots,0), x_3^1(1,0,\ldots,0), \ldots, x_r^1(1,0,\ldots,0), 1, 0, \ldots, 0\big)$$

$$\big(x_1^2(0,1,\ldots,0), x_2^2(0,1,\ldots,0), x_3^2(0,1,\ldots,0), \ldots, x_r^2(0,1,\ldots,0), 0, 1, \ldots, 0\big)$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\big(x_1^{n-r}(1,0,\ldots,0), x_2^{n-r}(0,0,\ldots,1), x_3^{n-r}(0,0,\ldots,1), \ldots, x_r^{n-r}(0,0,\ldots,1), 0, 0, \ldots, 1\big).$$

Pasirodo, kad šie vektoriai sudaro homogeninės t.l. sistemos sprendinių generuoto poerdvio V bazę. Taigi, kiekvieną šios sistemos sprendinį galima išreikšti šių sprendinių tiesiniu dariniu.

Skaitytojui siūlome įsitikinti, kad šis vektorių rinkinys yra tiesiškai nepriklausomas.

Temos teoriniai klausimai

3.1 Vektoriai. Vektorių veiksmai;
3.2 Vektorių tiesinė priklausomybė;
3.3 Teoremos apie vektorių priklausomumą;
3.4 Erdvės $\mathcal{R}^n$ bazė;
Teoremos apie rinkinius sudarančius erdvės bazę;
3.5 Vektorių rinkinio rangas;

3.6 Vektorių rinkinio elementarieji pertvarkiai;
3.7 Vektorių ir tiesinių lygčių sistemų ryšys;
3.8 Tiesinių lygčių sistemų suderinamumo sąlygos;
Vektorinės erdvės poerdviai,
a) vektorių rinkinių generuoti poerdviai;
b) homogeninių tiesinių lygčių sistemų sprendinių generuoti poerdviai.

Uždaviniai

1. Raskite vektorių $3\alpha - 5\beta$, kai

$$\alpha = (1, 2, 0, 4, 5),\ \beta = (2, 1, -1, 4, 1);$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

2. Raskite vektorių γ, jeigu $6\alpha - \gamma = 3\beta$ ir

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

3. Nustatykite ar duotieji vektorių rinkiniai tiesiškai priklausomi:

a) $$\alpha_1 = (2, 2, 1),\ \alpha_2 = (4, 3, 2),\ \alpha_3 = (10, 8, 5);$$

ATS: Priklausomas

b) $$\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \beta_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ATS: Priklausomas

c) $$\alpha_1 = (3, 4, 2),\ \alpha_2 = (2, 1, 1),\ \alpha_3 = (4, 1, 1)\alpha_4 = (1, 1, 2).$$

ATS: Priklausomas

d) $$\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \beta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ATS: Nepriklausomas

4. Nustatykite ar vektorių rinkiniai:

a) $$\alpha_1 = (2,1,3),\ \alpha_2 = (2,-1,-4),\ \alpha_3 = (1,-3,2);$$

b) $$\alpha_1 = (3,2,1,4),\ \alpha_2 = (2,-1,-2,0),\ \alpha_3 = (1,0,0,0),\ \alpha_4 = (-2,3,0,0);$$

c) $$\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix},\ \beta_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

yra bazės atitinkamose erdvėse.

ATS: a) ir b) yra bazės, o c)- ne.

5. Nustatykite, ar vektorių rinkinys:

$$\alpha_1 = (2,4,-6,3),\ \alpha_2 = (3,2,4,2),\ \alpha_3 = (2,3,2,-4),\ \alpha_4 = (-3,-2,3,2)$$

yra erdvės $\mathcal{R}^4$ bazė. Jei taip, raskite vektoriaus $\alpha = (-3,4,7,1)$ koordinates šioje bazėje.

ATS: Bazę sudaro. Vektoriaus α koordinatės bazėje yra $(1,0,2,3)$.

6. Nustatykite ar vektorių rinkinys sudaro erdvės bazę. Jei taip, raskite vektoriaus $\alpha = (0,1,2,3)$ koordinates bazėje:

$$\alpha_1 = (2,3,1,2);\ \alpha_2 = (0,-2,3,1);\ \alpha_3 = (1,1,1,1);\ \alpha_4 = (2,2,0,2).$$

ATS: Vektoriaus α koordinatės bazėje yra $(7;3;-14;0)$.

7. Nustatykite ar vektorių rinkinys

$$\alpha_1 = (1,2,0,-4,0);\ \alpha_2 = (1,-1,-3,1,-3);\ \alpha_3 = (2,-3,-4,-5,-2);$$

$$\alpha_4 = (1,-9,1,6,2);\ \alpha_5 = (3,7,-8,-14,-7)$$

sudaro erdvės bazę. Jei ne, raskite šio rinkinio tiesinio apvalkalo generuoto poerdvio bazę bei dimensiją. Nustatykite ar vektoriai

$$\alpha = (3,-6,-4,7,5) \text{ ir } \beta = (0,8,-4,-5,-5)$$

priklauso šiam poerdviui. Jei taip raskite šių vektorių koordinates kokioje nors poerdvio bazėje.

ATS: Bazės nesudaro. Vektorius α nepriklauso poerdviui, o vektorius $\beta-$ priklauso: $\beta = 1\alpha_5 + (-1)\alpha_2 + (-1)\alpha_1$ (viena iš galimybių)

8. Raskite pateiktųjų vektorių rinkinių rangus:

a) $$\alpha_1 = (1,4),\ \alpha_2 = (2,8),\ \alpha_3 = (-3,-12),\ \alpha_4 = (5,20);$$

b) $$\alpha_1 = (4,1,2),\ \alpha_2 = (2,3,4),\ \alpha_3 = (-2,2,2),\ \alpha_4 = (10,0,2);$$

c) $$\beta_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\ \beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\ \beta_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -8 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

ATS: a) rangas lygus 1; b) rangas lygus 2; a) rangas lygus 3;

9. Nustatykite, su kokiomis parametro reikšmėmis vektoriai $\alpha_a = (-1, a, 3, 2)$, $\beta_b = (b, 2, b-2, 1)$ priklauso vektorių rinkinio

c) $$\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\ \beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\ \beta_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

generuotam poerdviui.

ATS: $a = 8;\ \ b = 7.$

10. Raskite homogeninių tls-os sprendinių generuoto poerdvio bazę bei dimensiją. Nustatykite ar vektoriai $\alpha = (0, -2, -2, -2, 2)$ bei $(0, 2, 2, 3, 2, -2)$ priklauso šiam poerdviui. Jei taip, raskite vektoriaus koordinates poerdvio bazėje.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 0. \end{cases}$$

ATS: Vektorius α priklauso poerdviui, o $\beta-$ nepriklauso. Poerdvio dimensija lygi 1, o bazinis vektorius gali būti toks $e_1^* = (0, -1, -1, -1, 1)$. Tada $\alpha = 2e_1^*$.

10. Raskite homogeninių tls-os sprendinių generuoto poerdvio bazę bei dimensiją. Nustatykite ar vektoriai $\alpha = (4, 6, -2, -2)$ bei $(2, 3, 2, -2)$ priklauso šiam poerdviui. Jei taip, raskite vektoriaus koordinates poerdvio bazėje.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

ATS: Vektorius α priklauso poerdviui, o $\beta-$ nepriklauso. Poerdvio dimensija lygi 1, o bazinis vektorius gali būti toks $e_1^* = (-2, -3, 1, 1)$. Tada $\alpha = -2e_1^*$.

11. Nustatykite pateiktų matricų rangus:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 9 & 8 \\ 6 & -2 & 17 & 18 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad b)\ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & -4 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 10 & -4 & 9 & 9 \\ 1 & -1 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

ATS: a) $rangA = 2$; b) $rangB = 3$.

IV. KVADRATINĖS MATRICOS. KVADRATINIŲ MATRICŲ DETERMINANTAI

4.1 Matricos

Realiųjų skaičių lentelę

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & .. & \dots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

vadinsime $m \times n$ eilės matrica. Trumpai šią lentelę žymėsime taip:

$$A = \Big(a_{ij}\Big); (i = 1, \dots, m), \ (j = 1, \dots, n).$$

Kartais matricas žymėsime ir taip:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \big(\beta_1, \dots, \beta_n\big),$$

čia

$$\alpha_i; \quad (i = 1, \dots, m)$$

yra $n-$ mačiai vektoriai eilutės, o

$$\beta_j; \quad (j = 1, \dots, n)$$

yra $m-$ mačiai vektoriai stulpeliai.

Vektorius eilutė $\big(a_1, \dots, a_n\big)$ yra $1 \times n$, o stulpelis

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} - \ m \times 1$$

eilės, matricos.

Matricą, kurios eilučių ir stulpelių skaičius vienodas, vadinsime kvadratine. Kvadratinės matricos *eile* vadinsime eilučių arba stulpelių skaičių.

Kvadratinės matricos elementai $a_{11}, a_{22} \dots, a_{nn}$ vadinami pagrindinės įstrižainės elementais, o elementai $a_{1n}, a_{2n-1} \dots, a_{n1}-$ šalutinės įstrižainės elementais.

Matricų aibėje, panašiai kaip ir vektorių aibėje, yra apibrėžiama transponavimo operacija. Tarkime, kad duota matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & .. & \dots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Tada matricą

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & .. & \dots. \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

vadinsime, matricos A, transponuotąja matrica. Nesunku pastebėti, kad transponavimo operacija sukeičia pradinės matricos eilutes ir stulpelius vietomis. Taigi, jei pradinės matricos eilė $m \times n$, tai transponuotosios matricos eilė yra $n \times m$.

Kvadratinė matrica turinti savybę:

$$a_{ik} = a_{ki}, \ i, j = 1, \dots, n$$

vadinama simetrine, o matrica, kurios elementams galioja sąryšiai

$$a_{ik} = -a_{ki}, \ i, j = 1, \dots, n$$

vadinama asimetrine.

Matricą, kurios visi elementai lygūs nuliui, vadinsime nuline ir žymėsime simboliu O.

Kvadratinę matricą, kurios visi pagrindinės įstrižainės elementai lygūs vienam, o kiti elementai lygūs nuliui, vadinsime vienetine. Ją žymėsime simboliu E_n, kur indeksas apačioje reiškia matricos eilę, taigi

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & .. & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2 Matricų veiksmai

Aibę $m \times n$ eilės matricų, kurių elementai realūs skaičiai, žymėsime simboliu

$$\mathcal{R}_{m \times n} = \{\big(a_{ij}\big); (i = 1, \dots, m), \ (j = 1, \dots, n)\}.$$

Dvi tos pat eilės matricas vadinsime lygiomis, jeigu jų atitinkami elementai yra lygūs ir atvirkščiai, t.y. $(a_{ij}) = (b_{ij})$ tada ir tik tada, kai $a_{ij} = b_{ij}$.

Dviejų matricų $A = \big(a_{ij}\big), \ B = \big(b_{ij}\big) \in \mathcal{R}_{m \times n}$ suma vadinsime matricą $C = \big(c_{ij}\big) \in \mathcal{R}_{m \times n}$, kurios elementai nusakyti tokiu būdu:

$$\big(c_{ij}\big) = \big(a_{ik} + b_{ik}\big); \ (i = 1, \dots, m), \ (j = 1, \dots, n).$$

Matricos $A = \big(a_{ij}\big)$ ir realaus skaičiaus l sandauga vadinsime matricą

$$lA = \big(la_{ij}\big);\ (i = 1, \dots, m),\ (j = 1, \dots, n).$$

Taigi, aibė $\mathcal{R}_{m\times n}$ yra uždara šios aibės elementų sudėties ir daugybos iš skaičiaus atžvilgiu. Nurodysime kai kurias matricų veiksmų savybes. Šias savybes įrodyti siūlome pačiam skaitytojui.

1) Matricų sudėtis yra komutatyvi sudėties atžvilgiu:

$$A + B = B + A.$$

2) Matricų sudėtis asociatyvi:

$$\big(A + B\big) + C = A + \big(B + C\big).$$

3) Matricinė lygtis

$$A + X = B$$

turi vienintelį sprendinį

$$X = \big(b_{ij} - a_{ij}\big);\ (i = 1, \dots, m),\ (j = 1, \dots, n).$$

Nesunku matyti, kad $A + O = A,\ A + (-1)A = O$. Kitaip tariant, matricų aibėje galioja analogiška "kėlimo į kitą pusę keičiant ženklą priešingu" taisyklė, kaip ir skaičių aibėje.

4) Matricos ir realaus skaičiaus sandauga komutatyvi: $lA = Al$.

5) Tarkime, kad $l, t \in \mathcal{R}$ ir A, B kokios tai tos pačios eilės matricos. Tuomet teisingi sąryšiai:

a) $l\big(A + B\big) = lA + lB$,

b) $(l + t)A = lA + lB$,

c) $(lt)A = l\big(tA\big)$.

Tarkime, kad $A = \big(a_{ij}\big)$ yra $m \times s$ eilės, o $B = \big(b_{ij}\big)$ yra $s \times n$ eilės, matricos. Tada matricų A ir B sandauga, žymėsime AB, vadinsime matricą $C = AB = \big(c_{ij}\big);\ (i = 1, \dots, m),\ (j = 1, \dots, n)$, čia elementas c_{ij} skaičiuojamas tokiu būdu:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj};\ (i = 1, \dots, m), (j = 1, \dots, n).$$

Taigi, norint apskaičiuoti matricos C elementą c_{ij} mums teks matricos A, $i-$ osios eilutės elementus, padauginti iš atitinkamų matricos B $j-$osios eilutės elementų, o po to visas sandaugas sudėti.

Iš paskutiniojo apibrėžimo aišku, kad daugybos operacija galima tik tarp matricų, kurios turi savybę: pirmojo daugiklio stulpelių skaičius yra lygus antrojo daugiklio eilučių skaičiui. Iš pastarųjų samprotavimų aišku, kad kvadratinių matricų aibė uždara ir daugybos atžvilgiu.

Daugyba priešingai negu sudėtis, bendrai paėmus, nėra komutatyvi t.y., $AB \neq BA$. Siūlome skaitytojui tuo įsitikinti, atlikus daugybos operaciją tarp dviejų, žemiau pateiktų matricų:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ir } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1 **Teorema** Bet kokiai $n-$os eilės matricai teisinga lygybė:

$$AE_n = E_n A = A.$$

Be to, vienetinė matrica yra vienintelė.

$\ominus$
Pažymėkime

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j. \end{cases}$$

Tuomet vienetinę $n-$ os eilė matricą galime pažymėti taip

$$E_n = \left(\delta_{ij}\right); \ (i = 1, \ldots, n), \ (j = 1, \ldots, n).$$

Ateityje kvadratinės matricos indeksų kitimo aibės nenurodysime, laikydami, kad $i, k, j \in \{1, \ldots, n\}$. Tad tarkime, kad $A = \left(a_{ik}\right)$.

Pažymėję $AE_n = \left(c_{ik}\right)$ turime, kad

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{jk} = a_{ik}\delta_{kk} = a_{ik}; \ (i, k = 1, \ldots, n).$$

Antra vertus, pažymėję

$$E_n A = \left(d_{ik}\right)$$

turime, kad

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} a_{jk} = \delta_{ii} a_{ik} = a_{ik}, \ (i, k = 1, \ldots, n).$$

Iš paskutiniųjų lygybių išplaukia pirmosios teoremos dalies įrodymas.

Parodysime, kad vienetinė matrica $n-$ os eilės matricų aibėje yra vienintelė.

Tarkime priešingai, t.y. egzistuoja kita matrica, pažymėkime ją $E = \left(e_{ij}\right)$ tokia, kad $AE = EA = A$. Pasirinkime matricą A taip, kad visi jos elementai būtų lygūs nuliui, išskyrus pagrindinės įstrižainės elementus t.y. $a_{ss} \neq 0$. Tuomet iš lygybės $AE = A$ gauname

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_{jk} = \begin{cases} a_{ii} e_{ik} = 0, \ i \neq k, \\ a_{ii} e_{ii} = a_{ii}, \ i = k. \end{cases}$$

Vadinasi, $e_{ik} = 0$ kai $i \neq k$ ir $e_{ii} = 1$. Antra vertus, iš lygybės $EA = A$ gauname

$$a_{is} = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} a_{js} = \begin{cases} e_{ss} a_{is} = 0, \ i \neq s, \\ e_{ss} a_{ss} = a_{ss}, \ i = s. \end{cases}$$

Todėl $e_{is} = 0$, kai tik $i \neq s$. Imdami $s = 1, \dots, n$, gauname, kad matricos E visi pagrindinės įstrižainės elementai yra vienetai, o likę - nuliai. O tai reiškia, kad $E_n = E$.

$\oplus$

2 **Teorema** Kvadratinių matricų daugyba yra asociatyvi, bei distributyvi, t.y.

$$\big(AB\big)C = A\big(BC\big) \text{ ir } A\big(B + C\big) = AB + BC.$$

$\ominus$

Pažymėkime, $AB = \big(l_{km}\big)$. Aišku, kad $l_{km} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}b_{jm}$. Tegu,

$$\big(AB\big)C = \big(d_{pq}\big).$$

Tuomet

$$d_{pq} = \sum_{j=1}^{n} l_{pj}c_{jq} = \sum_{j=1}^{n} \big(\sum_{t=1}^{n} a_{pt}b_{tj}\big)c_{jq} \tag{4.1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} a_{pt}\big(b_{tj}c_{jq}\big).$$

Pažymėkime, $BC = \big(f_{km}\big)$. Taigi

$$f_{km} = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}c_{jm}.$$

Be to, pažymėję

$$A\big(BC\big) = \big(g_{iq}\big) \text{ turėsime, } g_{iq} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip}f_{pq} =$$

$$\sum_{p=1}^{n} a_{ip}\sum_{j=1}^{n} b_{pj}c_{jq} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ip}\big(b_{pj}c_{jq}\big)$$

Iš paskutinosios ir (4.1) lygybių išplaukia, kad kvadratinių matricų daugyba yra asociatyvi.

Distributyvumo savybę siūlome skaitytojui įrodyti savarankiškai.

$\oplus$

3 **Teorema** Bet kokios eilės matricų aibėje teisinga lygybė

$$\big(AB\big)^T = B^T A^T.$$

$\ominus$

Tarkime, kad matrica A yra $m \times s$ eilės, o matrica B yra $s \times n$ eilės. Pažymėkime

$$\big(AB\big)^T = D = \big(d_{ik}\big) \text{ ir } AB = C = \big(c_{ik}\big).$$

Atkreipsime dėmesį, kad $d_{ik} = c_{ki}$; $(i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m)$. Be to $c_{ki} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} b_{ji}$.

Dauginame matricas B^T ir A^T. Visų pirma pažymėkime

$$B^T A^T = \big(h_{ik}\big).$$

Tuomet

$$h_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \overline{b}_{ij} \overline{a}_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} a_{kj},$$

čia $\overline{b}_{ik},\ \overline{a}_{ik}$ yra atitinkami matricų $B^T,\ A^T$ elementai. Gavome, kad $h_{ik} = d_{ik}$. Bet tai ir reikėjo įrodyti.

$\oplus$

4 **Teorema** Matricų sandaugos rangas turi savybę:

$$\text{rang (AB)} \leq \min\{\text{rang } A, \text{rang } B\}.$$

$\ominus$

Tarkime, kad matricos $A = \big(a_{ij}\big)$ eilė yra $m \times s$, o matricos $B = \big(b_{jk}\big)$ eilė $s \times n$. Pažymėkime matricų A, B, ir AB rangus raidėmis r_A, r_B ir r, atitinkamai. Kadangi

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj};\ (i = 1, \ldots, m),\ (j = 1, \ldots, n)$$

tai

$$\begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \cdots \\ c_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{s} a_{1k} b_{kj} \\ \sum\limits_{k=1}^{s} a_{2k} b_{kj} \\ \cdots \\ \sum\limits_{k=1}^{s} a_{mk} b_{kj} \end{pmatrix} =$$

$$\sum_{k=1}^{s} b_{kj} \begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \cdots \\ c_{mk} \end{pmatrix},\ (j = 1, \ldots, n).$$

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad matricos AB stulpeliai yra matricos A stulpelių tiesiniai dariniai. Kadangi matricos A rangas lygus r_A, o visi matricos AB stulpeliai yra matricos A stulpelių tiesiniai dariniai, tai iš rango apibrėžimo išplaukia, kad bet kurie $r_A + 1$ matricos stulpeliai yra tiesiškai priklausomi. Taigi $r \leq r_A$. Analogiškai

$$\big(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in}\big) = \Big(\sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{k1}, \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{k2}, \ldots, \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kn}\Big) =$$

$$\sum_{k=1}^{s} a_{ik}(b_{k1}, b_{k2}, \ldots, b_{kn}); \; (i = 1, \ldots, m).$$

Paskutiniosios lygybės reiškia, kad matricos AB eilutės yra matricos B eilučių tiesiniai dariniai. Vadinasi, $r \leq r_B$.

$\oplus$

4.3 Kvadratinių matricų determinantai

Pirmos eilės matricos $\big(a\big)$ determinantu vadinsime skaičių a.

Antros eilės kvadratinės matricos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

determinantu, kurį žymėsime tokiu būdu:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

vadinsime skaičių

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Trečios eilės kvadratinės matricos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

determinantu, kurį žymėsime

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

vadinsime skaičių

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$\big(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}\big).$$

Tarkime, kad duota $n-$ os eilės kvadratinė matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tada šios matricos determinantą žymėsime simboliu

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Prieš nurodydami $n-$ os eilės determinanto skaičiavimo taisykles, pateiksime keletą savokų.

Apibrėžimas $n-$ os eilės matricos determinanto $|A|$ *elemento* a_{ij} *minoru* (žymėsime M_{ij}) vadinsime determinantą, kuris lieka iš šios matricos determinanto išbraukus į$-$ ąją eilutę bei $j-$ąjį stulpelį.

Pavyzdžiui

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Apibrėžimas Matricos *elemento* a_{ij} *adjunktu* vadinsime skaičių

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Tarkime, kad duota $n-$ os eilės matrica. Tada jos determinantu vadinsime skaičių

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \ldots + a_{jn}A_{jn},$$

$(j = 1, \ldots, n)$ jeigu jis egzistuoja. Beje, pastarosios lygybės vadinamos determinanto skleidimu pagal $j-$ąjį stulpelį arba $j-$ ąją eilutes, atitinkamai.

Šiuo "neefektyviu " apibrėžimu mes šiek tiek rizikuojame, kadangi neatsakome į klausimą ar šis apibrėžimas nėra tuščias ir antra, ar skaičiuojant visuomet reikia skaičiuoti sumas visiems $(j = 1, \ldots, n)$. Iš karto nuraminsime skaitytoją, patvirtindami, kad taip iš tiesų šis apibrėžimas yra turiningas ir kas svarbiausia, kad minimas skaičius iš ties yra vienintelis visiems $(j = 1, \ldots, n)$. Apie tai plačiau, jei skaitytojas susidomėtų, galima rasti A. Matuliauskas "Algebra" arba P. Survilos ir K. Bulotos knygoje "Algebra ir skaičių teorija".

Determinanto savybės.

1. Iš pastarojo apibrėžimo išplaukia, kad $|A| = |A^T|$.

2. Aišku, kad jei bent vienos determinanto eilutės arba stulpelio visi elementai lygūs nuliui, tai šis determinantas lygus nuliui.

3. Sukeitus determinanto eilutes vietomis, determinanto ženklas pasikeičia į priešingą, tačiau absoliuti jo reikšmė nesikeičia. Tai išplaukia iš tokių samprotavimų. Žinome, kad

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}.$$

Sukeitę determinanto eilutes vietomis, tarkime pirmąją su antrąja, ir skaičiuodami determinanto reikšmę pagal antrąją eilutę turime, kad

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$-a_{11}M_{11} + a_{12}M_{12} - \ldots + (-1)^n a_{1n}M_{1n}.$$

Tai ir įrodo nagrinėjamo teiginio teisingumą.

4. Jei determinantas turi bent dvi vienodas eilutes arba stulpelius tai jo reikšmė lygi nuliui. Pastarasis tvirtinimas yra tiesioginė 3. savybės išvada, kadangi sukeitę dvi vienodas eilutes vietomis gausime determinantą, kuris turi skirtis nuo pradinio ženklu, tačiau akivaizdu, kad tuo pat metu jo reikšmė turi būti tokia pat kaip ir pradinio (juk sukeitėme vienodas eilutes) determinanto. Vadinasi įmanomas tik vienintelis atvejis, t.y. kai determinanto reikšmė lygi nuliui.

5. Iš determinanto eilutės (stulpelio) galime iškelti bendrą daugiklį. Tai išplaukia iš determinanto apibrėžimo.

6. Apibendrindami dvi paskutiniąsias savybes galime tvirtinti, kad jei determinantas turi dvi proporcingas eilutes (stulpelius), tai jo reikšmė lygi nuliui.

7. Jei vienos determinanto eilutės elementus padauginsime iš kitos eilutės adjunktų ir sudėsime, tai ši suma bus lygi nuliui, pavyzdžiui

$$a_{k1}A_{j1} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0.$$

Žinome, kad

$$|A| = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \ldots + a_{jn}A_{jn}.$$

Užrašykime sumą

$$D = a_{k1}A_{j1} + a_{k2}A_{j2} + \ldots + a_{kn}A_{jn}.$$

Nesunku suprasti, kad paskutinioji suma reiškia determinantą, kurio $j-$ oji ir $k-$ oji eilutės sutampa. Bet žinome, kad toks determinantas lygus nuliui.

8. Jeigu determinanto kokią norw eilutę (stulpelį) padauginsime iš skaičiaus nelygaus nuliui ir sudėsime su kita eilute (stulpeliu) tai naujai gautas determinantas lygus pradiniam. Pastarasis tvirtinimas yra tiesioginė 6. savybės išvada. Siūloma ją patikrinti skaitytojui pačiam.

8. Paskutiniąją išvadą galime papildyti tokiu teiginiu: Jei determinanto kokia nors eilutė yra kitų eilučių tiesinis darinys, tai šis determinantas lygus nuliui.

Determinanto skaičiavimas remiantis jo savybėmis.

Determinanto eilučių (stulpelių) *elemetariaisiais pertvarkiais* vadinsime a) eilučių (stulpelių) keitimą vietomis, b) eilučių (stulpelių) dauginimą iš skaičiaus nelygaus nuliui ir c) eilučių (stulpelių) sudėtį. Remdamiesi aukščiau išvardintomis savybėmis galime tvirtinti, kad elementarieji pertvarkiai matricą keičia kita ir tokia, kad pradinės ir pakeistosios matricos determinantai sutampa.

Skaitytojui paliekame įsitikinti, kad matricos A determinantą visuomet galime perrašyti žemiau nurodytu būdu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{4.2}$$

4.4 Atvirkštinė matrica. Kramerio metodas.

Apibrėžimas Sakysime, kad kvadratinė matrica yra reguliari, jeigu jos rangas lygus matricos eilei. Priešingu atveju sakoma, kad matrica singuliari.

Apibrėžimas Matricą A^{-1} vadinsime matricai A atvirkštine matrica, jeigu

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Taigi, norint rasti matricos atvirkštinę tenka spresti tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} AX = E_n \,(1) \\ YA = E_n,\,(2) \end{cases} \tag{4.3}$$

čia X ir Y nežinomos matricos. Vadinasi, jei paskutiniosios lygčių sistemos sprendiniai sutampa, tai atvirkštinė egzistuoja. Pasirodo, kad teisinga tokia

5 **Teorema** Jeigu egzistuoja 4.3 sistemos bent vienos iš lygčių sprendinys, tai egzistuoja ir kitos lygties sprendinys. Dar daugiau, šie sprendiniai sutampa.

$\ominus$

Sakykime, kad egzistuoja 4.3 sistemos (1) lygties sprendinys $X = A'$. Padauginkime, iš matricos A', (2)- ąją šios sistemos lygtį iš dešinės. Gauname

$$YAA' = E_nA'.$$

Bet $AA' = E_n$ ir $YE_n = Y$. Taigi, $Y = A'$. Samprotaudami analogiškai galime parodyti, kad ir $X = A'$.

$\oplus$

Kyla klausimas, ar kiekviena matrica turi atvirkštinę?

6 **Teorema** Tam, kad matrica turėtų atvirkštinę būtina ir pakankama, kad ji būtų reguliari.

$\ominus$

Tarkime, kad atvirkštinė matrica egzistuoja. Žinome, kad matricos E_n rangas lygus n. Remdamiesi 4 teorema gauname, kad $\mathrm{rang}(AA^{-1}) \le \mathrm{rang}A$. Taigi, $n \le \mathrm{rang}A$. Antra vertus, kvadratinės matricos rangas ne didesnis už jos eilę. Gauname, kad matricos A rangas lygus n, taigi, matrica A reguliari.

Įrodysime atvirkštinį teiginį. Tarkime, kad matricos A rangas lygus n. Matricinę lygtį $AX = E$ užrašykime taip:

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_{j1} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_{j1} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Naudodamiesi matricų lygybės apibrėžimu, pakeiskime pastarąją lygybę tokia lygčių sistema:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_{jk} = 0; \ i \neq k, \ (i = 1, \ldots, m), \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}x_{jk} = 1; \ (k = 1, \ldots, n). \end{cases} \tag{4.4}$$

Pastaroji sistema reiškia n tiesinių lygčių sistemų su n nežinomaisiais, aibę. Pastebėkime, kad visų šių sistemų koeficientų matricos sutampa ir lygios matricai A. Kadangi matricos A rangas yra lygus n, tai visos šios sistemos turi sprendinius, tarkime

$$\big(x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jn}\big); \ (j = 1, \ldots, n).$$

Šiuos sprendinius surašę į matricą ir turėsime ieškomąją atvirkštinę matricą.

$\oplus$

Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad paskutinioji teorema pasiūlo metodą, kaip būtų galima apskaičiuoti matricos atvirkštinę. Bet šis metodas turi ir trūkumą, kadangi norint rasti, kad ir trečios eilės matricos atvirkštinę, tektų spręsti tris lygčių sistemas. Tačiau nėra to blogo kas neišeitų į gera! Prisiminkime modifikuotą Gauso metodą tiesinių lygčių sistemoms spręsti ir tai kas buvo aukščiau pasakyta. Visos mūsų lygčių sistemos turi tas pačias matricas ir sistemos skiriasi tik laisvųjų narių stulpeliais. O tai reiškia, kad visoms sistemoms atliekami tie patys eleminavimo žingsniai (suvedimas į trikampį pavidalą) skiriasi tik operacijų rezultatai atliekami su laisvųjų narių stulpeliais. Tikimės, kad skaitytojas nesunkiai supras, kad (4.4) sistemų visumą galime perrašyti taip:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Kitaip tariant prie sistemų bendrosios matricos šalia prirašėme vienetinę matricą. Beje, kiekvienas vienetinės matricos stulpelis kartu su sistemos matrica nusako tam tikrą t.l. sistemą. Gautoji matrica yra $n \times 2n$ eilės. Jau žinome, kad eilučių elementariųjų pertvarkių dėka, pastarąją matricą galime pertvarkyti į tokią:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tada matricos A atvirkštinė yra tokia

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

(kodėl?).

7 **Teorema** Jeigu matricos A, ir B turi atvirkštines, tai ir jų sandauga turi atvirkštinę, kuri skaičiuojama tokiu būdu:

$$\big(AB\big)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

$\ominus$

Patikrinkime, ar iš tiesų $B^{-1}A^{-1}$ yra matricos AB atvirkštinė. Taigi, pakanka suskaičiuoti

$$\big(AB\big)\big(B^{-1}A^{-1}\big) = A\big(BB^{-1}\big)A^{-1} = AA^{-1} = E_n.$$

$\oplus$

8 **Teorema** Jeigu matrica A turi atvirkštinę, tai ir jos transponuotoji turi atvirkštinę. Be to, transponuotosios atvirkštinė yra lygi atvirkštinės transponuotąjai, trumpai

$$\big(A^T\big)^{-1} = \big(A^{-1}\big)^T.$$

$\ominus$

Aišku, kad

$$\big(AA^{-1}\big)^T = E_n^T.$$

Todėl $\big(A^{-1}\big)^T A^T = E_n^T = E_n$. Tuo ir baigiame teoremos įrodymą.

$\oplus$

9 **Teorema** Jei tiesinės lygčių sistemos matrica reguliari, tai jos sprendinys yra skaičiuojamas tokiu būdu:

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

arba

$$X^T = \big(b_1, \dots, b_n\big)\big(A^{-1}\big)^T,$$

čia

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

yra laisvųjų narių stulpelis.

$\ominus$

Nesunku suprasti, kad tiesinių lygčių sistemą, naudodami matricas, galime perrašyti taip

$$AX = \beta, \text{ kur } X \text{ nežinomųjų stulpelis.}$$

Kadangi matrica A reguliari, tai ji turi atvirkštinę. Iš čia ir išplaukia teoremos įrodymas.

$\oplus$

Pasirodo, matricos reguliarumas priklauso nuo to ar matricos determinantas nulis ar ne.

10 **Teorema** Matrica A yra reguliari tada ir tik tada, kai $|A| \neq 0$.

$\ominus$

Tarkime, kad matrica reguliari. Tuomet jos rangas lygus n. Dar daugiau, elementariųjų pertvarkių dėka, šią matricą galime transformuoti į matricą

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Jau žinome, kad paskutiniosios matricos determinantas yra lygus 1 (žr. 4.2 lygybę).

Įrodysime atvirkštinį teiginį. Tarkime, kad matricos determinantas nelygus nuliui. Elementariųjų pertvarkių pagalba matricos determinantą galime transformuoti į determinantą

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

kuris lygus pradinės matricos determinantui, beje, pagrindinės įstrižainės visi elementai nelygūs nuliui. Pastebėsime, kad paskutinįjį determinantą atstovaujanti matrica

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

reguliari, kadangi jos rangas lygus n.

$\oplus$

Išvada Jei matrica singuliari, tai jos determinantas lygus nuliui.

Remdamiesi paskutiniąja teorema, 6 teoremą perrašome taip:

11 **Teorema** Matrica A turi atvirkštinę tada ir tik tada, kai $|A| \neq 0$. Dar daugiau, atvirkštinė gali būti skaičiuojama tokios formulės pagalba

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

$\ominus$

Pirmoji teoremos dalis tiesioginė 10 teoremos išvada. Parodykime, kad pateiktoji matrica iš tiesų yra matricai A atvirkštinė. Tam pakanka parodyti, kad matricos A ir nurodytos matricos sandauga yra vienetinė matrica. Skaičiuokime:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\Big(\frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}\Big) = \delta_{ik};\ (i,k=1,\ldots,n).$$

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad nurodyta matrica yra atvirkštinė.

$\oplus$

Tarkime, kad turime tiesinių lygčių sistemą

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = b_j;\ (j=1,\ldots,n),$$

kurios matricos determinantas nelygus nuliui. Pastebėsime, kad pastarąją lygčių sistemą galime užrašyti matricine forma taip:

$$AX=\beta,\ X=\begin{pmatrix} x_1\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix} b_1\\ \ldots\\ b_n\end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Kadangi matricos determinantas nelygus nuliui, tai egzistuoja šios matricos atvirkštinė A^{-1}. (4.5) lygybės abi puses padauginę iš kairės iš atvirkštinės matricos gauname,

$$\begin{pmatrix} x_1\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1\\ \ldots\\ b_n\end{pmatrix}.$$

Antra vertus,

$$A^{-1}\begin{pmatrix} b_1\\ \ldots\\ b_n\end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1\\ \ldots\\ b_n\end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} A_{j1}b_j\\ \ldots\\ \sum\limits_{j=1}^{n} A_{jn}b_j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad

$$x_k = \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n} A_{jk}b_j =: \frac{|A_k|}{|A|},\ k=1,\ldots,n. \tag{4.6}$$

Apibendrindami pastebėsime, kad $k-$ asis nežinomasis yra lygus t.l.sistemos matricos, kurios $k-$asis koeficientų stulpelis pakeistas laisvųjų narių stulpeliu, determinanto (kurį pažymėjome simboliu A_k) ir tiesinių lygčių sistemos matricos determinanto, santykiui, $k=1,\ldots,n$.

(4.6) formulės yra vadinamos *Kramerio formulėmis* lygčių sistemai spręsti.

Ir pabaigai pastebėsime, kad homogeninė t.l.s. turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai jos matricos determinantas yra lygus nuliui. Šios pastabos įrodymą paliekame skaitytojui.

4.5 Matricinės algebros taikymai. Leontjevo modelis

Laikysime, kad gamybinę sistemą sudaro n ūkio subjektų, kuriuos pažymėkime simboliais $U_1, \ldots, U_n$. Kiekvienas iš šių subjektų gamina kokią nors vieną produkcijos rūšį, P_j; $(j = 1, \ldots, n)$. Gaminamos produkcijos kiekius pažymėkime $x_1, \ldots, x_n$ atitinkamai. Tada vektorių

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{vadinsime gamybos plano vektoriumi.}$$

Papildomai tarkime, kad gamybos technologija yra tokia, kad dalis gaminamos produkcijos yra sunaudojama vietinėms reikmėms. Tarkime, kad šie sunaudojami kiekiai yra $y_1, y_2, \ldots, y_n$ atitinkamai. Tada

$$\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{vadinsime produkcijos sanaudų vektoriumi.}$$

Skirtumą $\alpha - \beta = \gamma$ vadinsime grynosios produkcijos vektoriumi, t.y.

$$\gamma = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \ldots \\ x_n - y_n \end{pmatrix}.$$

Tarkime, kad minėtosios produkcijos poreikiai yra tokie $c_1, \ldots, c_n$. Tada

$$\delta = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}, \text{vadinsime paklausos vektoriumi.}$$

Atsakykime, į tokį klausimą: kada ekonominė sistema yra subalansuota, t.y. kada grynosios produkcijos kiekiai sutampa su paklausa? Kitaip tariant, kada $\gamma = \delta$?

Tarkime, kad produkcijos P_i vienetui pagaminti, kuris naudojamas ekonominės sistemos vidaus poreikiams, yra sunaudojama visos produkcijos P_j dalis a_{ij} čia $i, j = 1, \ldots, n$. Skaičiai a_{ij} yra vadinami technologiniais koeficientais, o matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

vadinama technologine matrica. Taigi, norint kad gamyba fukcionuotų, vidiniam vartojimui reikalingas toks produkcijos kiekis:

$$\beta = A\alpha.$$

Tada grynosios produkcijos vektorių galime išreikšti taip:

$$\gamma = \alpha - \beta = \alpha - A\alpha.$$

Prisiminkime, kad $\alpha = E_n\alpha$. Tada $\alpha - A\alpha = E_n\alpha - A\alpha = \big(E_n - A\big)\alpha$. Taigi, balanso lygtį $\gamma = \delta$ galime perrašyti taip

$$\big(E_n - A\big)\alpha = \delta.$$

Bet paskutinioji lygybė reiškia tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = c_1, \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (1-a_{nn})x_n = c_n. \end{cases}$$

Galime padaryti tokią išvadą: norint sudaryti subalansuotą ekonominės sistemos gamybinės veiklos planą $\overline{\alpha}$, reikia išspręsti paskutiniąją lygčių sistemą. Pastarosios sistemos sprendinys ir galėtų būti laikomas planu $\overline{\alpha} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$, jeigu visos sprendinio komponentės $\overline{x_j}$, $(j = 1, \ldots, n)$ yra neneigiamos. Neigiamos komponentės turėdamos matematinę prasmę, šia savybe nepasižymi ekonomikoje. Tad planas $\overline{\alpha}$ turi būti ne tik lygties $\big(E_n - A\big)\alpha = \delta$ sprendiniu, bet ir visos sprendinio komponentės turi būti neneigiamos. Apibendrinkime tai. Sakysime, kad ekonominė sistema, su technologine matrica A yra produktyvi, jeigu balanso lygtis $\big(E_n - A\big)\alpha = \delta$ turi sprendinį $\overline{\alpha}$, kurio visos komponentės neneigiamos, koks bebūtų produkcijos paklausos vektorius δ. Mes žinome, kad būtina ir pakankama balanso lygties sprendinio egzistavimo sąlyga yra tokia: balanso lygties matrica yra reguliari. Yra žinoma, kad

12 **Teorema** ekonominė sistema, kurios technologinė matrica A, yra produktyvi tada ir tik tada, kai atvirkštinė matrica $\big(E_n - A\big)^{-1}$ egzistuoja ir visi šios matricos elementai yra teigiami.

Ekonominės sistemos produktyvumo paieškos uždavinys yra vadinamas *Leontjevo modeliu.*

Aukščiau aptartas ekonominis modelis buvo išvystytas amerikiečių ekonomisto W. W. Leonteff. Technologinė matrica nurodo sąryšius tarp įvairių ekonominių subjektų per tam tikrą laiko momentą. Beje, šie sąryšiai yra išreikšti procentiniai santykiais. Kiek kitaip apžvelkime aukščiau formalizuotą ūkinę sistemą. Tarkime, kad ūkinę sistemą sudaro trys gamybiniai subjektai A, B, C kurie tuo pat metu yra ir gamintojai ir vartotojai. Be šių subjektų galimi ir kiti išoriniai vartotojai, nepriklausantys šiai gamintojų sistemai. Kita vertus be šių trijų gamintojų gali būti ir kiti šiai trijų gamintojų sistemai nepriklausantys gamintojai, beje šie gtamintojai savo produkciją siūlo vartotojams, bet subjektai A, B, C šios pagamintos produkcijos nevartoja. Vartotojų sektorius kaip ir gamintojų sektorius sutampa. Tai gali būti žemės ūkis, atskiro pramonės šakos, namų ūkis, vyriausybė ir kt. Aptartą modelį aprašome tokia matrica:

	A	B	C	KV
A	50	70	200	360
B	90	30	270	320
C	120	240	100	1050
KG	420	370	940	4960

čia KV- kiti vartotojai ir KG- kiti gamintojai. Matricos eilutėse nurodoma, kaip atitinkamų gamybinių subjektų produkcija yra vartojama kitų subjektų. Pavyzdžiui, gamybinio subjekto A 50 sąlyginių vienetų suvartoja pats subjektas A, 70 vienetų suvartoja subjektas B, 200 vienetus subjektas C ir 360− kiti vartotojai. Matricos stulpeliuose yra nurodoma kiek, kitų gamybos sektorių, produkcijos suvartoja fiksuotas sektorius. Pavyzdžiui subjektas B suvartoja 70 subjekto A produkto sąlyginių vienetų, 30- subjekto B (paties) vienetų, 240- subjekto C vienetų ir 370 kitų gamintojų gaminamos produkcijos vienetų. Jei nagrinėjama sistema subalansuota, tai eilutės bei atitinkamuose stulpeliuose bendra produktų vienetų suma turi sutapti. Atkreipsime dėmesį, kad pirmosios eilutės bei pirmojo stulpelio sumos lygios 680. Akivaizdu, kad padidinus vieno kurio nors subjekto gamybinius pajėgumus turi augti ir kitų subjektų gamybiniai pajėgumai, o tuo pačiu ir vartojimas ir atvirkščiai, jei ūkinė sistema yra subalansuota.

Pastebėsime, kad pateiktos ūkinės sistemos technologinė matrica yra tokia:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{68} & \frac{7}{68} & \frac{20}{68} \\ \frac{9}{71} & \frac{3}{71} & \frac{27}{71} \\ \frac{12}{151} & \frac{24}{151} & \frac{10}{151} \end{pmatrix}.$$

Ūkinėje sistemoje yra gamintojai ir vartotojai. Beje, gamintojai tuo pačiu ir vartotojai. Technologinėje matricoje koeficientai nurodo kokią visos pagamintos produkcijos dalį suvartoja, gamybos procese, ūkinis subjektas. Atkreipsime dėmesį, kad KG (kiti gamintojai) tenkina tik ūkinės sistemos poreikius ir nedalyvauja išorinių poreikių tenkinimo procese. Vadinasi padidėjus vartojimui tuo pačiu turi didėti ir gamyba, tuo tarpu technologinės matricos koeficientai, esant subalansuotai ekonominei sistemai turi išlikti pastovūs, kadangi sąlyginiam vienetui pagaminti reikalinga kitų produktų dalis nepasikeičia. Tad galima teigti, kad technologinė matrica yra ūkinę sistemą charakterizuojantis dydis. Tad norint nustatyti gamybos lygį (planą), padidėjus vartojimui tereikia išspręsti balanso lygtį.

Panagrinėkime aptartą teorinę konstrukciją konkrečiu pavyzdžiu. Tarkime ūkinę sistemą sudaro du gamybiniai subjektai, o sistema aprašoma tokia matrica:

	A	B	Kiti poreikiai	*Galutiniai poreikiai*
A	240	500	460	1200
B	360	200	940	1500
Kiti gamybos faktoriai	600	800	–	
Bendra apimtis	1200	1500		

Matome, kad šios ūkinės sistemos produkcijos išoriniai poreikiai yra tokie: A produkcijos 460, o produkcijos $B-$ 940.

Sudarykime šios sistemos technologinę matricą. Turime, kad

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}.$$

Tarkim, kad A produktų poreikis padidėjo nuo 460 iki 500, o produktų B poreikis nuo 940 iki 1200. Panagrinėkime kaip pasikeis gamybos apimtis.

Aišku, kad šiuo atveju atitinkamų gaminamų produktų skaičius (poreikis) X_A, X_B gali būti užrašytas tokiomis lygtimis:

$$X_A = \frac{1}{5}X_A + \frac{1}{3}X_B + 500;$$

$$X_B = \frac{3}{10}X_A + \frac{2}{15}X_B + 1200.$$

Užrašykime šią sistemą matricine lygtimi. Turime, kad

$$\begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 500 \\ 1200 \end{pmatrix},$$

arba

$$X = A \cdot X + C, \quad X = \begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 500 \\ 1200 \end{pmatrix}.$$

Spręsdami šią matricų lygtį gauname plano lygtį:

$$X = (E - A)^{-1}C.$$

Tęsdami skaičiavimus gauname, kad

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{10} & \frac{13}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}.$$

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{130}{89} & \frac{50}{89} \\ \frac{45}{89} & \frac{120}{89} \end{pmatrix}.$$

Tada

$$X = (E - A)^{-1} C = \begin{pmatrix} \frac{130}{89} & \frac{50}{89} \\ \frac{45}{89} & \frac{120}{89} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 1200 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1404.5 \\ 1871 \end{pmatrix}.$$

4.6 Kiti taikymai. Tiesinės nelygybės. Mažiausių kvadratų metodas

Apibrėžimas *Tiesine nelygybe (toliau trumpinsime t.l.) su n nežinomųjų vadinsime nelygybę:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b,$$

čia $a_j, b \in \mathcal{Q}$, a_j, $(j = 1, \ldots, n)$ vadinami nelygybės koeficientais, $b-$ lygties laisvuoju nariu, x_j $(j = 1, \ldots, n)-$ lygties nežinomaisiais.

Reiškinys $4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 \leq 7$ yra tiesinė nelygybė su keturiais nežinomaisiais.

Apibrėžimas *Racionaliųjų skaičių rinkinį $(l_1, \ldots, l_n)$ vadinsime t. nelygybės sprendiniu, jeigu šis rinkinys tenkina nelygybę:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j l_j \equiv b.$$

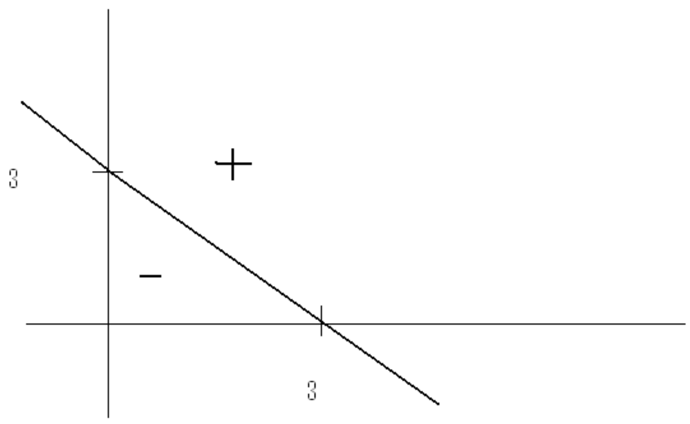
Kitaip tariant, minėtasis rinkinys vadinamas sprendiniu, jeigu nelygybėje nežinomųjų vietoje įrašę šį rinkinį gauname teisingą skaitinę nelygybę.

Pavyzdžiui skaičių rinkinys $(1, 0, 2)$ yra lygties $2x_1 - 4x_2 + 5x_3 \leq 12$ sprendinys, kadangi $12 \leq 12$.

Ateityje nagrinėsime tik dviejų kintamųjų tiesines lygtis bei nelygybes. Skaitytojui priminsime, kad dviejų kintamųjų tiesinė lygtis yra tiesės lygtis plokštumoje $ax+by+c = 0$. Ši tiesė plokštumą dalija į tris dalis ir kiekvienos dalies taškai, tiesės atžvilgiu, tenkina tą pačią savybę, t.y. vienos plokštumos dalies taškus įrašę į tiesės lygtį gausime neigiamas skaitines reikšmes, kitos plokštumos dalies taškus įrašę į tiesės lygtį gautume teigiamas reikšmes, o trečios dalies taškai priklauso tiesei ir juos įrašę gautume skaitinę reikšmę lygią nuliui. Iliustruokime pavyzdžiu. Tarkime, kad duota tiesinė lygtis

$$x + y - 3 = 0$$

žr. paveikslėlis apačioje. $+$ ženklas žymi plokštumos dalį, kurios taškus įrašę į tiesės lygtį gausime teigiamas skaitines reikšmes- $-$ neigiamas skaitines reikšmes.



Nesunku suprasti, kad jei reikia nurodyti dviejų nežinomųjų tiesinės nelygybės sprendinių aibę, tai pakanka nurodyti pusplokštumę, kurios taškai tenkina nurodytą nelygybę. Pavyzdžiui nelygybės

$$x + y - 3 \leq 0$$

sprendinių aibę sudaro pusplokštumės dalis, kurios taškuose įgyjama neigiama reikšmė.

Apibrėžimas*Funkciją* $f(x, y) = ax + by + c, \quad a, b, c$ *yra realūs skaičiai, vadinsime tiesine dviejų kintamųjų funkcija.*

Tarkime, kad duota tiesinė funkcija $f(x, y) = ax + by + c$. Tada lygtį $f(x, y) = d$, $d-$ realus skaičius vadinsime tiesinės funkcijos *lygio linija*. Pastebėsime, kad tiesinės funkcijos lygio linija yra tiesė. Taigi, su kiekviena tiesine funkcija galime susieti begalo daug lygio linijų. Kiekvienos lygio linijos taškuose tiesinė funkcija įgyja pastovias reikšmes. Jeigu su tiesine funkcija susiejame lygio liniją

$$f(x, y) = 0,$$

tai šios lygio linijos taškuose tiesinės funkcijos reikšmės lygios nuliui. Vadinasi ši lygio linija dalija plokštumą į dvi dalis taip, kad vienoje plokštumos dalyje tiesinės funkcijos reikšmės yra teigiamos, o kitoje neigiamos. Dar daugiau, tiesinės funkcijos reikšmės yra pastovios tiesėse, lygiagrečiose tiesei $ax + by = 0$ ir tolstant nuo minėtos lygio linijos $+$ pusplokštumėje funkcijos reikšmės didėja, o $-$ pusplokštumėje- mažėja. Tai kas buvo pasakyta reikia turėti omenyje, kai ieškome tiesinės funkcijos didžiausios arba mažiausios reikšmės kokioje nors plokštumos dalyje.

Apibrėžimas *Tiesinių nelygybių aibę:*

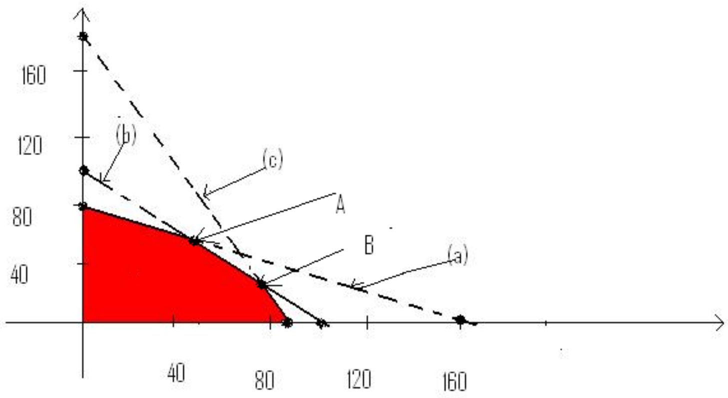
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases}$$

vadinsime m tiesinių nelygybių, su n nežinomaisiais, sistema.

Panagrinėkime pavyzdį. Tarkime, kad duota tiesinių nelygybių sistema

$$\begin{cases} x + y \leq 100 \ (a), \\ x + 2y \leq 160 \ (b), \\ 2x + y \leq 180 \ (c), \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

Tada šios nelygybių sistemos sprendinių aibė geometriškai pavaizduota pav. apačioje.



Aptarkime algoritmą, kaip rasti dviejų kintamųjų tiesinės funkcijos maksimalią (minimalią) reikšmes nurodytoje plokštumos dalyje, kuri yra nelygybių sistemos sprendinių aibė.

Tarkime duota tiesinė funkcija $f(x, y) = ax + by + c$. Raskime šios tiesinės funkcijos didžiausią ir mažiausią reikšmes nelygybių sistemos

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \sim b_1, \\ a_{21}x + a_2 y \sim b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x + a_{m2}y \sim b_m, \end{cases} \quad a_{i1}, \ a_{i2}, \ \ b_i \in \mathcal{R},$$

o simbolis $\sim$ reiškia vieną iš simbolių $\leq, \geq, =, <, >$.

Algoritmas

1. Tiesinių nelygybių sistemoje esančias nelygybes keičiame lygybėmis ir gauname tiesių lygtis.

2. Šias tiesių lygtis braižome plokštumoje ir tuo pačiu nurodome tiesinių nelygybių sprendinių sritis.

3. Plokštumoje pažymime šią sritį.

4. Surandame visų tiesių susikirtimo taškus.

5. Randame tiesinės funkcijos reikšmes visuose susikirtimo taškuose.

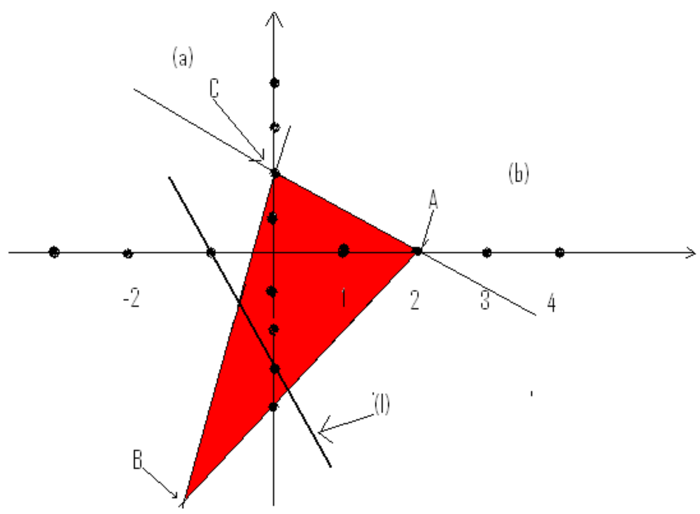
6. Iš reikšmių, suskaičiuotų 5. dalyje išrenkame didžiausią ir mažiausią. Šios reikšmės ir bus ieškomosios.

Pastaba Paprastai sprendžiant šį uždavinį visų susikirtimo taškų rasti nereikia, kadangi šis darbas gana varginantis. Paprastai pakanka rasti ne daugiau negu dviejų tiesių susikirtimo taškus, kurie ieškomi priklausomai nuo to, kaip plokštumoje yra išsidėstęs lygio linijos $f(x, y) = 0$ grafikas. Nubrėžus šį grafiką tampa aišku kuria kryptimi tiesinė funkcija didėja, o kuria mažėja.

Panagrinėkime pavyzdį. Tarkime, kad duota tiesinių nelygybių sistema

$$\begin{cases} x + y \leq 2 \ (a), \\ 2x - y \leq 4 \ (b), \\ -3x + y \leq 1 \ (c). \end{cases}$$

Raskime funkcijos $f(x, y) = 3x + 2y + 6$ didžiausią ir mažiausią reikšmes nelygybių sistemos sprendinių aibėje. Randame nelygybių sistemos sprendinių aibę reprezentuojančią plokštumos sritį ir nubrėžiame lygio liniją $3x+2y+6 = 0$ pav. žemiau. + ženklu pažymime plokštumos dalį, kurioje nagrinėjama tiesinė funkcija teigiama (yra didėjanti, tolstant nuo lygio linijos), o kitoje - mažėjanti.



Nesunku suprasti, kad nagrinėjama funkcija maksimalią reikšmę įgyja taške A, o minimalią- taške B. Taško A koordinatės akivaizdžios, t.y. $(2, 0)$, o taško B gaunamos sprendžiant sistemą:

$$\begin{cases} -3x + 2y = 2, \\ 2x - y = 4 \end{cases}.$$

Išsprendę gauname, kad $B(-5, -14)$.

Vadinasi

$$\max_D f(x, y) = f(A) = f(2, 0) = 18, \quad \min_D f(x, y) = f(B) = f(-5, -14) = -26.$$

Mažiausių kvadratų metodas matricine forma.

Tarkime, kad tiesinė lygčių sistema

$$AX = Y$$

yra nesuderinta. Tada tiesinė lygčių sistema

$$A^T AX = A^T Y$$

yra vadinama sistemos $AX = Y$ *normaliąja sistema.* Normaliosios sistemos sprendiniai yra vadinami sistemos $AX = B$ mažiausių kvadratų sprendiniais.

Pavyzdys Tarkime plokštumoje duoti n taškų

$$(x_1, y_1); \dots, (x_n, y_n).$$

Problema tokia: rasti $k-$ ojo laipsnio polinomą

$$y = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + a_1 x + a_0$$

"geriausiai" reprezentuojantį šiuos duomenis. Kitaip tariant rasime $k-$ ojo laipsnio polinomą tokį, kad atstumų nuo šių taškų iki polinomo grafiko kadratų suma būtų minimali.

Sudarome lygčių sistemą polinomo koeficientams rasti darydami prielaidą, kad šiam polinomui priklauso minėti taškai.

$$\begin{cases} a_k x_1^k + a_{k-1} x_1^{k-1} + a_1 x_1 + a_0 = y_1, \\ a_k x_2^k + a_{k-1} x_2^{k-1} + a_1 x_2 + a_0 = y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_k x_n^k + a_{k-1} x_n^{k-1} + a_1 x_n + a_0 = y_n. \end{cases}$$

Užrašę matricine forma turime, kad $AX = Y$, čia

$$A = \begin{pmatrix} x_1^k & x_1^{k-1} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^k & x_2^{k-1} & \dots & x_2 & 1 \\ .. \\ x_n^k & x_n^{k-1} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \\ \dots \\ a_0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Įdomu tai, kad ši sistema, bendrai nagrinėjant, sprendinių neturi, kadangi laisvai pasirinkus taškus plokštumoje nereikia tikėtis, kad šie taškai priklausys polinomo grafikui. Sudarome šios sistemos normaliąją sistemą, kuri jau turės sprendinius, o sprendiniai kaip tik ir bus ieškomi polinomo koeficientai. Normalioji sistema yra tokia:

$$CX = A^T Y, \quad C = A^T A = \begin{pmatrix} x_1^k & x_2^k & \dots & x_n^k \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_n^{k-1} \\ \dots. \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^k & x_1^{k-1} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^k & x_2^{k-1} & \dots & x_2 & 1 \\ .. \\ x_n^k & x_n^{k-1} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix}$$

Tada ieškomus koeficientus randame tokiu būdu:

$$\begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \\ \dots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = C^{-1} A^T Y.$$

Panagrinėkime konkretų pavyzdį.

Pavyzdys Duoti trys taškai $(1, 1)$; $(2, 3)$; $(3, 2)$. Naudodami mažiausių kvadratų metodą raskite tiesės lygtį $ax + b = y$ geriausiai aproksimuojančią šiuos duomenis.

Sudarome sistemą $AX = Y$, čia:

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ 2a + b = 3 \\ 3a + b = 2; \end{cases}$$

arba

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Padauginę abi lygybės puses iš matricos A^T gauname:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Atlikę matricų aritmetinius veiksmus gauname

$$\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Tada

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Arba

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

gauname, kad mažiausių kvadratų tiesė yra tokia:

$$y = \frac{1}{2}x + 1.$$

Uždaviniai

Matricos ir determinantai

1. Duota matrica

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 14 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Kokia matricos eilė?
b) Kam lygi suma $a_{21} + a_{34} + a_{42} + a_{33}$?
c) Raskite šios matrios pagrindinės ir šalutinės įstrižainių elementų skirtumą.

ATS: a) matricos eilė 4×4 arba tiesiog ketvirtos eilės matrica.
b) 7.
c) -11.

2. Tarkime, kad matrica A yra 3×4 eilės, kurios elementai apibrėžti tokiu būdu:

$$A = \big(a_{ij}\big); \quad a_{ij} = (-1)^{i+j}(2i + 3j).$$

Sudarykite šią matricą.

ATS:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 11 & -14 \\ -7 & 10 & -13 & 16 \\ 9 & -12 & 15 & -18 \end{pmatrix}$$

3. Kompanija parduoda trijų rūšių kilimėlius A, B, C, kurie be to yra raudonos, žalios, mėlynos bei violetinės spalvos. Mėnesio pardavimų ataskaitą kompanija surašo į matricą, kurios eilutėse rašo atitinkamų rūšių A, B, C pardavimų kiekius, o stulpeliuose nurodo spalvos kodą- raudoną, žalią, mėlyną, violetinį, atitinkamai. Žemiau yra pateiktos Sausio bei vasario pardavimų ataskaitos:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Kiek žalių B rūšies kilimėlių buvo parduota sausio mėnesį?
b) Kiek B rūšies kilimėlių buvo parduota vasario mėnesį?
c) Kurį mėnesį buvo daugiausia parduota violetinių kilimėlių?
d) Kurios rūšies ir kurios spalvos kilimėlių buvo parduota vienodai per abu mėnesius?
e) Kurį mėnesį daugiausia parduota B rūšies kilimėlių?
f) Kiek iš viso buvo parduota kilimėlių sausio mėnesį?
g) Sudarykite abiejų mėnesių pardavimų matricą G.

h) Raskite metinių pardavimų matricą M, jei žinoma, kad ji sudaroma tokiu būdu: 100% didesni visų rūšių ir spalvų sausio pardavimai plius 200% didesni vasario mėnesio pardavimai.

ATS: a) 7; b) 3; c) $Vasario$; d) B; $melyni$; e) $Vasario$; f) 35;

g)

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

h)

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 18 & 14 & 16 \\ 6 & 11 & 15 & 16 \\ 16 & 14 & 18 & 18 \end{pmatrix}.$$

4. Apskaičiuokite AB, BA bei, jei įmanoma $AB - BA$, kai

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Įsitikinkite, kad

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

ATS: a) $skirtumas$ negalimas b)

$$\text{b)} \quad AB - BA = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -19 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \quad AB - BA = \begin{pmatrix} 4 & 22 & -9 \\ -1 & -5 & -8 \\ 3 & 12 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Jei įmanoma apskaičiuokite sandaugas AB, kai

$$a) \; A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$b)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix};$$

$$c)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$d)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

ATS: a) sandauga negalima. $b)$ (32).

$$\text{c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 12 \\ 3 & 18 \end{pmatrix} \qquad \text{d)} \quad \begin{pmatrix} 16 & -3 & 11 \\ 10 & -1 & 0 \\ -7 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

6. Apskaičiuokite $A(BC)$ jei

$$a)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Įsitikinkite, kad $A(BC) = (AB)C$.

ATS:

$$\begin{pmatrix} -4 & -9 \\ 6 & 19 \end{pmatrix}.$$

7. Apskaičiuokite $A(B + C)$ jei

$$a)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Įsitikinkite, kad $A(B + C) = AB + BC$.

ATS:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}.$$

8. Raskite matricą $3(A - 2I)$, jei I vienetinė antros eilės matrico, o

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

ATS:

$$3(A-2I)=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 3 & 6\end{pmatrix}.$$

9. Tarkime, kad duotos matricos:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

$$F=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\end{pmatrix},,\quad G=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},$$

$$H=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Atlikite tokius matricų veiksmus:
a) AB; b) CF; c) DG; d) EC;
e) $DI-\frac{1}{3}G$; f) $3A-2BC$; g) $2I-\frac{1}{2}GH$; h) $(DC)A$.

ATS:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix}-4 & 11 & -2\\ 3 & -12 & 3\end{pmatrix},\ \text{b)}\ \begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 8\end{pmatrix},\ \text{c)}\ \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 3\\ 3 & 12 & 3\end{pmatrix}.\ \text{d)}\ \begin{pmatrix}7\\ 23\end{pmatrix},$$

$$\text{e)}\ \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix};\ \text{f)}\ \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix};$$

$$\text{g)}\ \begin{pmatrix}-1 & -20\\ -2 & 23\end{pmatrix}\quad \text{h)}\ \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & 1\\ 0 & 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix};\ \text{g)}\ \begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 17\\ 1 & 31\end{pmatrix}.$$

10. Remiantis sutartimi firma privalo pastatyti 5 rastinius (RA), 7 karkasinius (KA) bei 12 mūrinių (MU) namų. Šią sutartį galima apibrėžti matrica $A=(5\quad 7\quad 12)$. Šiems pastatams pastatyti reikia metalo (M), medienos (W), stiklo (S), gipso gaminių (G), darbo jėgos (D). Trumpiniais žymime atitinkamų poreikių vienetų skaičių. Susiekime kiekvieną pastatą su medžiagų poreikiais tokia matrica

	M	W	S	G	D
RA	5	20	16	7	17
KA	7	18	12	9	21
MU	6	25	8	5	13

a) Apskaičiuokite visų medžiagų bendruosius poreikius.

b) Nustatykite kiekvieno namo bendrąją sąmatinę vertę, jeigu M vienetas kainuoja 1500 Lt, W- 800 Lt, S- 500 Lt,G- 100 Lt, D-1000 Lt.

c) Nustatykite visų namų bendrąsias statybos išlaidas.

ATS: a) 146 526 260 158 388; b) 49200 52800 46500 c) 1173600.

11. Panagrinėkime supaprastintą ekonominę sistemą, kurią sudaro trys pramonės šakos, tarkime žemės ūkis (Z), pramonė (P) bei aptarnavimo sfera (A) bei trys sąlyginiai vartotojai $1, 2, 3$. Nesunku suprasti, kad ne tik išoriniai vartotojai, bet ir šios atskiros pramonės šakos gali būti kitų šakų produktų vartotojai. Šiuo atveju laikome, kad pramonės šaka nėra savo produkcijos vartotoja, bet nesunju suprast, kad bendrai paėmus taip galėtų būti. Tegu D_1, D_2, D_3- yra trijų vartotojų poreikių matricos, o D_Z, D_P, D_A- yra pramonės šakų 1×3 eilės vartojimo matricos. Pavyzdžiui tarkime, kad

$$D_1 = (\,3 \quad 2 \quad 5\,), \quad D_2 = (0 \quad 17 \quad 1), \quad D_3 = (4 \quad 6 \quad 12)$$

ir

$$D_Z = (0 \quad 1 \quad 4), \quad D_2 = (20 \;\; 0 \;\; 8), \quad D_3 = (30 \;\; 5 \;\; 0).$$

Tarkime, kad sąlyginis žemės produkcijos kainuoja 10000 Lt, pramonės- 20000 Lt, o aptarnavimo sferos - 40000LT.

a) Nustatykite bendrą visų pramonės šakų gaminamos produkcijos poreikių matricą.

b) Nustatykite kokias išlaidas turi kiekviena atitinkama ūkio šaka bei atitinkami išoriniai vartotojai esant nurodytoms sąlyginių vienetų kainoms bei pirkimų kiekiams;

c) Nustatykite kiekvienos pramonės šakos gautą pelną.

ATS:

$$\text{a)} \quad (\,57 \quad 31 \quad 30\,)\,; \quad \text{b)} \quad (\,180000 \quad 520000 \quad 400000\,)\,; \quad (\,270000 \quad 380000 \quad 640000\,)\,,$$

$$\text{c)} \quad (\,390000 \quad 100000 \quad 800000\,)\,.$$

12. Apskaičiuokite $AX + B - C$, kai

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -27 & 11 \\ -3 & 18 & -5 \\ -6 & -5 & -7 \end{pmatrix}.$$

ATS: a) $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

13. a) Raskite visas antros eilės matricas, kurių kvadratas yra lygus nulinei matricai. b) Raskite visas antros eilės matricas, kurių kvadratas lygus vienetinei matricai.

ATS: a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{ab} & a \\ -b & -\sqrt{ab} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{ab} & a \\ -b & \sqrt{ab} \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ a & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

14. Raskite pateiktų matricų atvirkštines, naudodami Gauso-Žordano metodą, jeigu egzistuoja:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ATS:

$$\text{a) } A^{-1} = -\frac{1}{44} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -14 & -6 \\ -12 & 8 & 16 \\ -7 & 1 & -9 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 17 & -9 & -3 \\ -7 & 12 & 4 \\ -10 & 0 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } C^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -5 \\ -6 & 2 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

15. Išspręskite matricinę lygtį $AX = B$, naudodami Gauso-Žordano metodą:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ATS:

$$X = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 22 & -6 & 5 \\ -31 & 13 & -5 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Apskaičiuokite determinantus:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}; \; b) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \; c) \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$d) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 9 \\ -5 & 6 & 10 & -11 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}; \; e) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \; f) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 35 \end{vmatrix}.$$

ATS: a) -44; b) -2 c) 47. d) -351; e) 33 f) 24.

17. Apskaičiuokite determinantus:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & 10 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 6 & -6 & -2 \end{vmatrix}; \; b) \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

ATS: a) 106; b) -108

18. Apskaičiuokite matricos atvirkštinę, naudodamiesi atvirkštinės matricos skaičiavimo formule (naudojant adjunktus):

$$a) \; A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; b) \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ATS:

$$\text{a) } A^{-1} = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}; \quad \text{a) } B^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -5 & 3 \\ 10 & -2 & 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

19. Išspręskite pateiktas matricų lygtis:

$$\text{a) } AB^2XA^{-2} + B = E, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } B^{-2}ABXB^{-1}A = E, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } AX + B = C, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ .$$

ATS:

$$\text{a) } X = B^{-2}A^{-1}(E-B)A^2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } X = B^{-1}A^{-1}B^2A^{-1}B = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -58 & -169 \\ 34 & 99 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } X = A^{-1}(C-B) = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 7 & 23 \\ 12 & 6 & -16 \\ 2 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

20. Naudodami Kramerio metodą apskaičiuokite:

$$a) \ \begin{cases} 2x + 3y = -11, \\ 3x - 4y = 9, \end{cases} \quad b) \ \begin{cases} 4x + 2y - z = 5, \\ x - 3y + 8z = -7, \\ -5x - y + z = -6; \end{cases}$$

$$c) \ \begin{cases} 4x + y - 3z = 3, \\ x - 3y + 5z = 0, \\ 7x + 3y - 9z = -4; \end{cases} \quad d) \ \begin{cases} 4x + 2y - z + t = 11, \\ 2x - y + 8z - 1 = 9, \\ -5x + 13y + 2z - 4t = -3, \\ x + y + 3z + t = 8. \end{cases}$$

ATS: a) $(-1, -3)$; b) $(1, 0, -1)$; c) $(1, 2, 1)$; d) $(2, 1, 1, 2)$.

21. Naudodami Kramerio metodą nustatykite, kokios turi būti parametrų m, n reikšmės, kad sistema

$$1)\quad \begin{cases} 3x-2y+z=-2, \\ x-y+4z=n, \\ 5x+my-2z=-3; \end{cases}$$

turėtų a) vienintelį sprendinį, b) neturėtų sprendinių, c) turėtų begalo daug sprendinių?

ATS: a) $m \neq -3$; b) $m=-3,\ n\neq -1$; c) $m=-3,\ n=-1$.

22. Kokia turi būti parametro reikšmė, kad sistema turėtų vienintelį sprendinį

$$2)\quad \begin{cases} x+y+z+mu=5, \\ x+y+mz+u=1, \\ x+my+z+u=1, \\ mx+y+z+u=1. \end{cases}$$

ATS: $m\neq 1$.

23. Tarkime, kad ekonominę sistemą sudaro du gamintojai. Jų produkcijos paklausos matrica ir technologinė matrica, atitinkamai, yra tokie

$$a)\ \gamma=\begin{pmatrix} 560 \\ 780 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix};$$

$$b)\ \gamma=\begin{pmatrix} 520 \\ 640 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Ar egzistuoja gamybos optimalus planas? Jei taip raskite šį planą.

ATS:) a) $\begin{pmatrix} 4844 \\ 4466 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 7900 \\ 3700 \end{pmatrix}$.

24. Tarkime, kad ekonominės sistemos gamintojų technologinės ir atitinkamos poreikių matricos yra tokios:

$$a)\ A=\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.425 \\ 0 & 0.75 & 0.5 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix};$$

$$b)\ A=\begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

ATS:)

$$a)\ X=\frac{3}{4}\cdot\begin{pmatrix} 87000 \\ 78000 \\ 72000 \end{pmatrix}\qquad b)\ X\approx\begin{pmatrix} 2222 \\ 1333 \\ 2777 \end{pmatrix}.$$

25. Tarkime, kad ūkinę sistemą sudaro du gamintojai, A ir B. Gamybos ryšių matrica apibrėžta tokiu būdu:

	A	B	Kiti poreikiai	*Galutiniai poreikiai*
A	200	500	500	1200
B	400	200	900	1500
Kiti gamybos faktoriai	600	800	–	
Bendra apimtis	1200	1500		

Raskite šios ūkinės sistemos technologinę matricą. Raskite ūkinių šakų A ir B pagamintos produkcijos kiekius X_A ir X_B (gamybos planą), jei žinoma, kad poreikiai produkcijos A pakis nuo 500 iki 600, o produkcijos B poreikiai pakis nuo 900 iki 805. Raskite KG (kitos gamybos faktorių) kaštus K.

ATS: a) $X_A \approx 1290$, $X_B \approx 1425$. $K = 1405$.

26. Tarkime, kad ūkinę sistemą sudaro trys gamintojai, A B ir C. Gamybos ryšių matrica apibrėžta tokiu būdu:

	A	B	C	Kiti poreikiai
A	18	30	45	15
B	27	30	60	3
C	54	40	60	26
Kiti gamybos faktoriai	9	20	15	–

Raskite šios ūkinės sistemos technologinę matricą. Raskite ūkinių šakų A, B ir C pagamintos produkcijos kiekius X_A ir X_B, X_C (gamybos planą), jei žinoma, kad

a) produkcijos A poreikiai pakis iki 50, produkcijos B poreikiai pakis iki 40 ir produkcijos C poreikiai pakis iki 30.

b) produkcijos A poreikiai pakis iki 10, produkcijos B poreikiai pakis iki 10 ir produkcijos C poreikiai pakis iki 24.

ATS: a) $X_A \approx 298, \quad X_B \approx 350, \quad X_C \approx 443;$
b) $X_A \approx 102, \quad X_B \approx 125, \quad X_C \approx 175.$

27. Užpildykite matricas taip, kad ūkinė sistema būtų subalansuota
a)

	A	*B*	Kiti poreikiai	*Galutiniai poreikiai*
A	400	y	300	1400
B	400	600	x	1500
Kiti gamybos faktoriai	600	800	–	
Bendra apimtis	1400	1500		

ATS: a) $x = 500, \quad y = 700$

28.
1) Raskite funkcijos $f(x, y) = 10x + 12y$ maksimalią reikšmę srityje

$$\begin{cases} x + y \leq 60, \\ x - 2y \geq 0, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

2) Raskite funkcijos $f(x, y) = 4x - 6y$ maksimalią reikšmę srityje

$$\begin{cases} y \leq 7, \\ 3x - y \leq 3, \\ x + y \geq 5, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

3) Raskite funkcijos $f(x, y) = 7x + 3y$ minimalią reikšmę srityje

$$\begin{cases} 3x - y \geq -2, \\ x + y \leq 9, \\ x - y = -1, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

4) Raskite funkcijos $f(x, y) = 2x + y$ minimalią reikšmę srityje

$$\begin{cases} 3x + y \geq 3, \\ 4x + 3y \geq 6, \\ x + 2y \geq 2, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

5) Raskite funkcijos $f(x, y) = 10x + 2y$ maksimalią reikšmę srityje

$$\begin{cases} x + 2y \geq 4, \\ x - 2y \geq 0, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

ATS: 1) $f_{\max}(40, 20) = 640$; 2) $f_{\min}(2, 3) = -10$; 3) $f_{\max}(0, 1) = 3$; 4) $f_{\min}(0.6, 1.2) = 2.4$; 5) $f_{\max} = \infty$ (neegzistuoja nes funkcija šioje srityje neapibrėžta).

29. Statybinius įrankius gaminantis verslininkas gamina dviejų rūšių įrankius A ir B. Kiekvienam įrankiui pagaminti yra naudojamos dvi staklės $S1$ ir $S2$ bei baigiamuosius žingsnius atliekantys darbuotojai D. Žemiau pateiktoje lentelėje pateikiamos darbo laiko sąnaudos reikalingos įrankiams pagaminti:

	$S1$	$S2$	D
A	2	1	1
B	1	1	1

Žinoma, kad per savaitę pirmosios staklės gali dirbti ne daugiau negu 70h, antrosios staklės ne daugiau negu 40h ir baigiamuosius darbus atliekantys darbininkai ne daugiau negu 90h. Pardavus pirmąjį įrankį A gaunamas 40Lt pelnas, o antrąjį 60Lt pelnas. Nustatykite, kiek ir kokių įrankių reikėtų pagaminti per savaitę, kad pelnas būtų didžiausias. Koks šiuo atveju bus pelnas?

ATS: $15A$, $25B$. Pelnas $2100Lt$.

30. Gamykla iš dviejų rūdos rūšių $R1$, $R2$ išskiria dvi metalų rūšis: metalą A ir B atitinkamai. Lentelėje yra pateikiami kiek kg. metalo yra išskiriama iš vienos tonos rūdos bei apačioje nurodyti kaštai (K):

	$R1$	$R2$
A	100	200
B	200	50
K	50	60

.

Gamykla privalo pagaminti ne mažiau negu 3 tonas metalo A ir 2.5 tonos metalo B. Nustatykite kiek ir kokio metalo turi būti pagaminta, kad kaštai būtų minimalūs. Raskite šiuos minimalius kaštus.

ATS: $10tA$, $10tB$. Pelnas $1100Lt$.

V. VEKTORIAI. DEKARTO KOORDINAČIŲ SISTEMA

5.1 Skaliarinė sandauga erdvėje $\mathcal{R}^n$

Tarkime, kad duota vektorinė erdvė $\mathcal{R}^n$. Priminsime, kad šios erdvės elementai yra vektoriai $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$. Be mums jau žinomų vektorių veiksmų šioje erdvėje apibrėžkime dar vieną operaciją.

Apibrėžimas Dviejų vektorių $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ ir $\beta = (b_1, \ldots b_n)$ skaliarine sandauga (žymėsime $\alpha \circ \beta$) vadinsime skaičių

$$\alpha \circ \beta = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

Vektorinės erdvės savoka gana abstrakti, nors neabejoju, kad skaitytojas įdėmiau studijavęs ankstyvesnę medžiagą pastebėjo, kad vektorinės erdvės elementai (vektoriai) turi savybes, kurias turi skaitytojui žinomų trimatės erdvės arba plokštumos, o gal net ir tiesės elementai? Gana plačią vektorinės erdvės sąvoką šiek tiek susiaurinkime, reikalaudami, kad vektorinėje erdvėje būtų apibrėžta skaliarinė sandauga.

Apibrėžimas Tarkime, kad x, y, z bet kokie, vektorinės erdvės $\mathcal{R}^n$ elementai. Tuomet funkcija ($\rho : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}$), kuri dviems vektorinės erdvės elementams priskiria realų skaičių, vadinsime atstumu, jeigu ji turi savybes:
1) $\rho(x, y) \geq 0,\ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Kyla klausimas - kas gi toji funkcija $\rho(,)$, kaip ją apibrėžti. Pasirodo, kad tai atlikti galime naudodami skaliarinę sandaugą. Skaitytojas nesunkiai gali patikrinti, kad visas atstumo savybes tenkina funkcija

$$\rho(x, y) := \sqrt{(x - y) \circ (x - y)}.$$

Kitaip tariant

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}, \tag{5.1}$$

jeigu $x, y \in \mathcal{R}^n$. Tikimės, kad skaitytojas supranta, kad atstumas tarp erdvės elementų nusakomas ne vieninteliu būdu! Ateityje mes nagrinėsime vektorinių erdvių $\mathcal{R}^n$, kai $n = 1, 2, 3$ su jose apibrėžta (5.1) metrika, atitiktis.

5.2 Geometriniai vektoriai. Veiksmų savybės

Prisiminkime mokyklinės geometrijos kursą, kitaip dar vadinamą- Euklidine geometrija. Euklidinės geometrijos objektas yra geometrinių figūrų savybių tiesėje, plokštumoje, bei erdvėje, tyrimas. Priminsime skaitytojui, kad matematinės sąvokos - taškas, tiesė, plokštuma, erdvė, atstumas yra neapibrėžiamos, t.y. pirminės. Susitarkime tiesę, plokštumą, bei erdvę, ateityje, jei nekils neaiškumų, vadinti tiesiog erdvėmis.

Geometriniu vektoriumi vadinsime tiesės atkarpą, su nurodytąja kryptimi. Taigi, vektorius erdvėje apibrėžia kryptį ir "daugybė" atkarpų, turinčių tą pačią kryptį ir ilgį reiškia tą patį vektorių. Beje, kiekviena tiesės atkarpa yra charakterizuojama ilgiu (tiesės atkarpos charakteristika). Taip apibrėžto vektoriaus atkarpos pradžios tašką vadinsime vektoriaus pradžios tašku, o tašką, kuriame nurodoma kryptis - pabaigos tašku. Kitaip tariant du vektoriai lygūs, kai vektorius nusakančių atkarpų ilgiai vienodi ir kryptys sutampa. Vektorius vadinsime kolineriais, jeigu juos nusakančios atkarpos lygiagrečios. Iš pastarojo apibrėžimo išplaukia, kad tiesėje visi vektoriai kolinerūs. Sakysime, kad vektoriai komplanariniai, jei jie nėra kolineriniai ir yra vienoje plokštumoje. Sutarkime geometrinį vektorių žymėti graikiškosios abėcėlės mažosiomis raidėmis, jeigu mums bus nesvarbūs vektoriaus pradžios bei pabaigos taškai. Jeigu vektorius jungia taškus A, B, čia A yra vektoriaus pradžios, o $B-$ pabaigos taškai, tai tada vektorių žymėsime $\overrightarrow{AB}$.

Vektoriaus ir skaičiaus $c \in \mathcal{R},\ c \neq 0$, sandauga $c\alpha$ vadinsime vektorių γ, kurio ilgis skiriasi nuo pradinio vektoriaus ilgio c vienetų (t.y. c kartų ilgesnis, jei $|c| > 1$ ir c kartų trumpesnis, jei $0 < |c| < 1$, be to γ kryptis ta pati kaip ir pradinio vektoriaus jei $c > 0$ ir priešinga, jei $c < 0$. Norėtume pabrėžti, kad daugindami vektorių iš skaičiaus gauname vektorių, kolinerų pradiniam vektoriui, t.y. vektoriai γ ir α yra kolinerūs.

Geometrinių vektorių aibėje sudėties operaciją apibrėžkime tokiu būdu: sudėdami du vektorius visų pirma, abu dėmenis, atlikę lygiagretų postūmį, perkeliame į vieną tašką. Brėžiame lygiagretainį (jei vektoriai nekolinerūs), kurio kraštines sudaro minėtieji vektoriai. Tada šių vektorių suma vadinsime vektorių, kurio pradžios taškas sutampa su dėmenų pradžios tašku, o pabaigos taškas yra priešingoje lygiagretainio viršūnėje. Du vektorius galime sudėti ir kitu, taip vadinamu trikampio, būdu. Jo esmė tokia. Prie pirmojo dėmens pabaigos taško, lygiagretaus postūmio pagalba, perkelkime antrojo dėmens pradžios tašką. Tada vektorius, jungiantis pirmojo dėmens pradžios tašką su antrojo vektoriaus pabaigos tašku bus vadinamas šių vektorių suma. Žinoma, visai nesvarbu kokiu būdu sudėsime, trikampio ar lygiagretainio, rezultatas bus tas pat. Vektoriaus α ir β skirtumu vadinsime vektorių α ir $(-1)\beta$ sumą, trumpai $\alpha - \beta = \alpha + (-1)\beta$. Jei vektoriai kolinerūs ir tos pat krypties, tai jų suma yra vektorius, kurio ilgis lygus dėmenų ilgių sumai, o kryptis tokia pat kaip ir dėmenų. Jeigu vektorių kryptys priešingos, tai jų suma bus vadinamas vektorius, kurio ilgis lygus vektorių ilgių skirtumui, o šio vektoriaus kryptis sutampa su vektoriaus, kurio ilgis didesnis, kryptimi.

Skaitytojui paliekame įrodyti tokias vektorių veiksmų savybes:

1) $$\alpha + \beta = \beta + \gamma,\ \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Be to, jeigu $m, n \in \mathcal{R}$, tai

2) $$(m + n)\alpha = m\alpha + n\alpha,\ m(\alpha + \beta) = m\alpha + m\beta,$$

3) $$m(n\alpha) = (mn)\alpha.$$

Geometrinį vektorių α_0 vadinsime vektoriaus α ortu, jeigu jis kolinerus vektoriui α ir jo ilgis lygus vienetui. Geometrinio vektoriaus ilgį žymėsime $|\alpha|$. Akivaizdu, kad bet kokį vektorių galime užrašyti $\alpha = |\alpha|\alpha_0$. Vektorių α ir β skaliarine sandauga, kurią žymėsime $\alpha \cdot \beta$, vadinsime skaičių, kuris lygus vektorių ilgio ir kampo tarp jų kosinuso reikšmės sandaugai, t.y.

$$\alpha \cdot \beta = |a||b| \cos \psi,$$

ψ yra kampas tarp vektorių α ir β.

Tarkime duoti du vektoriai - α ir β. Tada skaičių $pr_\beta a := \alpha \cdot \beta_0$ vadinsime vektoriaus α projekcija vektoriaus β kryptimi, kur β_0 yra vektoriaus β ortas. Iš pastarojo apibrėžimo gauname gerai žinomą formulę $pr_\beta a = a \cos \alpha$, kur α yra kampas tarp vektorių α, β. Tarkime, kad duota vektorių α ir β suma. Tada vektorių sumos projekcija, tarkime vektoriaus γ kryptimi, yra lygi dėmenų projekcijų sumai, t.y.

$$pr_\gamma(\alpha + \beta) = pr_\gamma \alpha + pr_\gamma \beta \text{ ir } pr_\gamma k\alpha = kpr_\gamma \alpha, \tag{5.2}$$

čia $k \in \mathcal{R}$.

Skaliarinės sandaugos savybės

1. Skaliarinė sandauga yra komutatyvi, t.y.

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$$

2. Skaliarinė sandrauga turi distributyvumo savybę:

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma.$$

3. Jei vektoriai kolinerūs, tai

$$\alpha \cdot \beta = \pm|\alpha||\beta|,$$

" $-$ " bus tuo atveju, kai vektorių kryptys priešingos (skiriasi 180^0 laipsnių kampu), o kitu atveju bus + ženklas.

4. Vektoriaus skaliarinė sandauga iš jo paties lygi

$$4) \ \ \alpha \cdot \alpha = \sqrt{|\alpha|^2}.$$

Tarkime, kad vektoriai α, β yra komplanariniai plokštumos vektoriai. Tada bet kokį vektorių γ galime užrašyti tokiu būdu: $\gamma = m\alpha + n\beta$, kur m, n yra vektoriaus γ projekcijos vektorių α, β kryptimi, atitinkamai. Norėdami tuo įsitikinti, vektorius γ, $m\alpha$, $n\beta$ lygiagrečiu postūmiu perkelkime į bendrą tašką. Tai atlikę pastebėsime, kad vektorius γ yra lygiagretainio, kurio kraštines apibrėžia vektoriai $m\alpha$ ir $n\beta$, įstrižainė. Jeigu α, β, γ - esantys ne vienoje plokštumoje erdvės vektoriai, tai naudodami dviejų nekolinerių vektorių sudėties taisyklę, nuosekliai du kartus, bet kokiam erdvės vektoriui δ gauname:

$$\delta = k\alpha + l\beta + m\gamma, \tag{5.3}$$

kur k, l, m yra vektoriaus δ projekcijos vektorių α, β, γ kryptimis, atitinkamai. Beje, tikimės, kad skaitytojas atkreipė dėmesį į tai, kad sumarinis vektorius δ, paskutinėje lygybėje, geometriškai reiškia gretasienio, kurio kraštines apibrėžia vektoriai

$$k\alpha,\ l\gamma,\ m\gamma,$$

įstrižainę.

Tris, poromis statmenus ortus, kurie prasideda viename taške, vadinsime erdvės reperiu. Pažymėkime šiuos ortus raidėmis $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad bet kokį erdvės vektorių galime užrašyti vektorių $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ tiesiniais dariniais. Be to, jeigu

$\delta_1 = k_1\mathbf{i} + l_1\mathbf{j} + m_1\mathbf{k}$, o $\delta_2 = k_2\mathbf{i} + l_2\mathbf{j} + m_2\mathbf{k}$, tai

$$\delta_1 + \delta_2 = (k_1 + k_2)\mathbf{i} + (l_1 + l_2)\mathbf{j} + (m_1 + m_2)\mathbf{k}.$$

$$k\delta_1 = kk_1\mathbf{i} + kl_1\mathbf{j} + km_1\mathbf{k}.$$

Šios lygybės įrodymas išplaukia iš vektorių (5.2) projekcijų savybių.

Kyla klausimas- ar bet koks vektorius, reperio vektorių tiesiniais dariniais, užrašomas vieninteliu būdu? Tarkime priešingai, t.y. vektorių δ galime užrašyti vektorių $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tiesiniais dariniais ne vieninteliu būdu. Taigi $\delta = k_1\mathbf{i} + l_1\mathbf{j} + m_1\mathbf{k}$, ir $\delta = k_2\mathbf{i} + l_2\mathbf{j} + m_2\mathbf{k}$. Atėmę lygtis vieną iš kitos gauname (prie vektoriaus δ pridedame vektorių $-\delta$),

$$0 = (k_1 - k_2)\mathbf{k} + (l_1 - l_2)\mathbf{j} + (m_1 - m_2)k.$$

Iš pastarosios lygybės išplaukia, kad $k_1 = k_2, l_1 = l_2, m_1 = m_2$. Priešingu atveju vektoriai $\mathbf{i}, \mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ būtų komplanarūs, kadangi vieną vektorių galėtume užrašyti kitų tiesiniu dariniu.

Du statmenus plokštumos ortus, prasidedančius bendrame taške, vadinsime plokštumos reperiu. Analogiškai kaip ir erdvės atveju, plokštumos reperio vektorių tiesiniu dariniu galime išreikšti bet kokį plokštu- mos vektorių. Dar daugiau, kiekvienas vektorius išreiškiamas vieninteliu būdu.

Priskirkime geometriniam vektoriui δ_1 jo projekcijas į vektorius $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tokiu būdu: $\delta_1 = (k_1, l_1, m_1)$. Išsiaiškinome, kad nekomplanarių vektorių tiesiniu dariniu galime išreikšti duotą vektorių vieninteliu būdu, todėl teisingas ir atvirkščias veiksmas - bet kokiam realių skaičių rinkiniui (k, l, m) mes galime priskirti vienintelį geometrinį vektorių : $\delta := k_1\mathbf{i} + l_1\mathbf{j} + m_1\mathbf{k}$. Kadangi ryšys tarp erdvės vektorių ir realiųjų skaičių rinkinių abipus vienareikšmis, o realiųjų skaičių rinkinių (l, m, n) aibė yra vektorinė erdvė $\mathcal{R}^3$ tai tikimės, skaitytojas, susipažinęs su ankstesniųjų skyrelių medžiaga pastebėjo, kad vektoriai $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ erdvėje atlieka bazės vektorių vaidmenį. Vadinasi tarp erdvės ir nagrinėtosios vektorinės erdvės $\mathcal{R}^3$ elementų egzistuoja abipus vienareikšmiškas sąryšis (bijekcija). Todėl ateityje mes nebeskirsime vektorių (vektorinės erdvės elementų) nuo geometrinių vektorių, nors vartodami vektoriaus sąvoką, omenyje turėsime geometrinį vektorių.

Visiškai analogiškas ryšys ir tarp vektorinės erdvės R^2 elementų ir plokštumos vektorių.

Todėl natūralu reperį vadinti erdvės (plokštumos) baze, kadangi bet kokį vektorių galime užrašyti (5.3) tiesinio darinio pagalba, o vektoriaus projekcijos reperio vektorių kryptimi, yra jo koordinatės bazėje. Tikimės, kad skaitytojui tapo aiškus ryšys tarp jau nagrinėtos vektorinių erdvių $\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2, \mathcal{R}^3$ ir tiesės, plokštumos bei erdvės, atitinkamai. Kadangi jau atkreipėme dėmesį, kad tarp kai kurių vektorinių bei geometrinių vektorių erdvių egzistuoja abipus vienareikšmiška atitiktis, tai jau minėtą, neapibrėžtą atstumo savoką galime patikslinti, t.y. geometrinių vektorių erdvėje atstumu laikysime atstumą, tarp šiuos vektorius atitinkančių erdvės $\mathcal{R}^n$ elementų. Tad atstumą skaičiuosime remdamiesi (5.1) formule. Tačiau atstumą galime apibrėžti ir kiek kitu būdu. Šį būdą ir panagrinėkime.

Ateityje vektorių, kurio pradžia taške A, o galas taške B žymėsime simboliu $\overrightarrow{AB}$. Tarkime, kad duota tiesė. Parinkime joje tašką O, kurį pavadinkime pradžios tašku. Tegu X bet koks kitas, fiksuotas, šios tiesės taškas. Susitarkime vektoriaus $\overrightarrow{OX}$ ilgį laikyti lygų vienetui. Tokiu būdu mes parenkame tiesėje mastelį, laikydami atkarpą OX vienetine. Tad natūralu žymėti $\overrightarrow{OX} = \mathbf{i}$. Taškų pora O ir A, pasirinkta tiesėje nurodytu būdu, bus vadinama *Dekarto koordinačių sistema* tiesėje. Jeigu taškas X yra dešinėje pusėje, taško O atžvilgiu, tai šią koordinačių sistemą vadinsime *tiesiogine*, priešingu atveju- *netiesiogine*. Tarkime, kad A, bet koks tiesės OX taškas. Tada skaičių x, kuriam teisinga lygybė: $\overrightarrow{OA} = x\mathbf{i}$ vadinsime taško A koordinate duotoje koordinačių sistemoje. Aišku, tada atstumas tarp dviejų taškų, tarkime A ir B, yra lygus vektoriaus, jungiančio šiuos taškus, ilgiui. Jeigu A koordinatė yra x, o B koordinatė yra y, tai tada $\rho(X,Y) = |x-y|$ (žr. 5.1 formulė), kadangi esant apibrėžtai koordinačių sistemai tiesėje, jos taškus galime, abipus vienareikšmiškai, sutapatinti su vektorinės erdvės $\mathcal{R}^1$ elementais.

Tarkime, kad duotos dvi statmenos tiesės plokštumoje. Jų susikirtimo tašką pažymėkime raide O. Kaip ir tiesės atveju šį tašką vadinsime, pradžios tašku. Tarkime, kad taškas O yra ortų $\mathbf{i}$ ir $\mathbf{j}$, esančių skirtingose tiesėse, pradžios taškas. Tarkime, šių vektorių pabaigos taškai X ir $Y-$ atitinkamai. Šias tieses vadinsime tiesėmis OX (arba abscise) ir OY, (arba ordinate) atitinkamai. Tiesių OX ir OY sistemą plokštumoje vadinama ortogonaliąja Dekarto koordinačių sistema. Su statmenomis tiesėmis mes susiejome reperį, kuris statmenoms tiesėms suteikė orientaciją (kryptis). Fiksuokime statų kampą tarp reperio vektorių, tuo pačiu ir tiesių. Sakykime, kad tiesės OX orientacija yra tiesioginė. Tada sakysime, kad plokštumos ortogonalioji Dekarto koordinačių sistema yra *tiesioginė*, jeigu mažesnis kampas tarp vektorių $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ yra teigiamas. Priminsime, kad kampas $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ teigiamas, jeigu vektorių $\mathbf{i}$ reikia sukti vektoriaus $\mathbf{j}$ kryptimi, prieš laikrodžio rodyklę. Kitu atveju ortogonalioji Dekarto koordinačių sistema bus vadinama *netiesiogine*. Koordinatinės ašys plokštumą dalija į keturias dalis, kurias mes vadinsime ketvirčiais. Pirmuoju ketvirčiu vadinsime visus plokštumos taškus, kurių abscisė ir ordinatė yra teigiamos. Kiti ketvirčiai numeruojami eilės tvarka prieš laikrodžio rodyklę.

Pastebėsime, kad bet kokio taško B padėtį plokštumoje visiškai apibrėžia vektorius $\overrightarrow{OB}$, o pastarasis yra tiesinis vektorių $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ darinys, t.y.

$$\overrightarrow{OB} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Plokštumos vektoriaus koordinates x, y vadinsime plokštumos taško B koordinatėmis ir žymėsime $B(x,y)$. Tarkime, kad $B(b_1, b_2)$ ir $C(c_1, c_2)$ yra du plokštumos taškai. Tuomet šiuos du taškus jungiančio vektoriaus $\overrightarrow{BC}$ ilgis yra lygus (žr. 5.1 formulę)

$$\rho(B,C) = \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2},$$

kadangi tap plokštumos taškų ir erdvės $\mathcal{R}^2$ vektorių egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis (bijekcija). Šį skaičių vadinsime atstumu tarp taškų B, C. Beje, pastarąją formulę skaitytojas lengvai galėtų gauti naudodamasis Pitagoro teorema!

Sakykime, kad duotos trys statmenos tiesės erdvėje. Jų susikirtimo tašką pažymėkime raide O. Šį tašką vadinsime, pradžios tašku. Tarkime, kad taškas O yra reperio vektorių $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, esančių skirtingose tiesėse, pradžios taškas. Tarkime, šių vektorių pabaigos taškai X, Y, $Z-$ atitinkamai. Šias tieses vadinsime tiesėmis Ox, Oy ir Oz atitinkamai. Tiesių Ox, Oy ir Oz sistemą vadinsime ortogonaliąja Dekarto koordinačių sistema erdvėje.

Pateiksime nelabai vykusį matematiniu požiūriu, bet skaitytojui lengviau suvokiamą dešininės orientacijos sąvoką. Sakysime, kad reperis α, β, γ turi *dešininę orientaciją*, jeigu vektoriaus γ kryptis yra tokia, kad stovint reperio vektorių bendrame taške, vektoriaus γ kryptimi, vektorius α yra dešinėje, o β kairėje pusėje, t.y. vektorių α ir β sistema yra tiesioginė. Sakysime, kad erdvės Dekarto koordinačių sistema yra tiesioginė, jeigu reperis $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ turi dešininę orientaciją. Reperį susietą su koordinačių sistema vadinsime koordinatiniu reperiu.

Kaip matuosime atstumą erdvėje? Pastebėsime, kad bet kokio taško B padėtį erdvėje, kurioje apibrėžta koordinačių sistema, nusako vektorius $\overrightarrow{OB}$, o pastarasis yra tiesinis vektorių $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ darinys, t.y.

$$\overrightarrow{OB} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Skaičius x, y, z vadinsime erdvės taško B koordinatėmis ir žymėsime $B(x, y, z)$. Tarkime, kad $B(b_1, b_2, b_2)$ ir $C(c_1, c_2, c_3)$ yra du erdvės taškai. Tuomet šiuos du taškus jungiančio vektoriaus $\overrightarrow{BC}$ ilgis, o tuo pačiu ir atstumas tarp taškų B, C yra lygus (žr. 5.1 formulę),

$$\rho(B, C) = \sqrt{(c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2 + (c_3 - b_3)^2}.$$

Jeigu erdvėje (plokštumoje, tiesėje) apibrėžta koordinačių sistema (ateityje naudosime tik ortogonaliąsias Dekarto koordinačių sistemas), tai bet koks geometrinis vektorius abipus vienareikšmiškai susietas su koordinačių rinkiniu, t.y. $\forall\alpha$ ir $\forall\beta$ egzistuoja realių skaičių trejetai tokie, kad

$$\alpha = (a_1, a_2, a_3), \ \beta = (b_1, b_2, b_3). \tag{5.4}$$

Nesunku įsitikinti, kad šie realiųjų skaičių trejetai yra vektorių projekcijos vienetinių vektorių $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, kryptimis. Vadinasi

$$\alpha = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad \beta = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}.$$

Tarkime, kad $A(a_1, a_2, a_3)$ yra vektoriaus pradžios, o $B(b_1, b_2, b_3), -$ pabaigos, taškai. Tada naudodami vektorių sudėties taisyklę gauname, kad $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Bet tada vektorius $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Remdamiesi (5.1) formule gauname, kad vektoriaus ilgis (atstumas nuo koordinačių pradžios taško iki taško A) yra

$$|\alpha| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Turime, kad $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

Tada

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0,\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0,\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0,$$

ir

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1,\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1,\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1,$$

Daugindami vektorių α skaliariškai su reperio $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ vektoriais gauname kampus,

$$\cos\psi_1=\frac{a_1}{|\alpha|},\ \cos\psi_2=\frac{a_2}{|\alpha|},\ \cos\psi_3=\frac{a_3}{|\alpha|},$$

kuriuos vektorius α sudaro su koordinatėmis ašimis Ox, Oy, Oz, atitinkamai.

Naudodamiesi geometrinių vektorių skaliarinės sandaugos apibrė žimu ir 5.4 lygybėmis gauname, kad

$$\alpha\cdot\beta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,\ \cos\psi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{|\alpha||\beta|},$$

čia ψ yra kampas tarp vektorių α ir β.

Apibrėžimas Vektorių α ir β *vektorine sandauga* vadinsime vektorių γ, kurio ilgis lygus vektorių α ir β ir kampo tarp jų sinuso sandaugai, be to jis statmenas vektorių α ir β plokštumai ir orentuotas taip, kad vektorių trejetas α,β,γ turi dešininę orientaciją.

$$\gamma=\alpha\times\beta=|\alpha||\beta|\sin\psi\mathbf{l},$$

čia vektorius $\mathbf{l}$ yra ortas, statmenas vektorių α,β plokštumai, o vektorių $\alpha,\beta,$ sistema turi dešininę orientaciją.

Iš pastarojo apibrėžimo išplaukia, kad $\alpha\times\beta=-(\beta\times\alpha)$.

Tarkime, kad $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ yra koordinatinis reperis. Tuomet

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j},$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=0,\ \mathbf{j}\times\mathbf{j}=0,\ \mathbf{k}\times\mathbf{k}=0. \tag{5.5}$$

Tarkime, kad vektoriai α ir β apibrėžti (5.4) lygybėmis. Siūlome skaitytojui, remiantis (5.5) lygybėmis įrodyti žemiau pateiktas vektorių savybes

1) $$\alpha\times\beta=-(\beta\times\alpha);$$

2) $$\big(\alpha+\beta\big)\times\gamma=\alpha\times\gamma+\beta\times\gamma;$$

3) $$\alpha\times\beta=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

Nesunku suprasti, kad jei vektoriai kolinerūs, tai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui. Prisiminkime, kad jei vektoriai statmeni, tai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui.

Aptarsime, atkarpos dalijimo uždavinį. Atkarpa yra tiesės dalis tarp dviejų taškų A, B. Sakykime, kad minėtoji atkarpa yra erdvėje, be to šioje erdvėje apibrėžta Dekarto koordinačių sistema. Tuomet $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$. Tarkime, kad taškas $C(x, y, z)$ priklauso atkarpai AB. Dalinkime atkarpą į dvi dalis taip, kad

$$\frac{AC}{CB} = \lambda.$$

Pastebėkime, kad vektoriai $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{CB}$ yra kolinerūs. Kadangi norimas atkarpų dalijimo santykis lygus λ, tai $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Prisiminkime, kad du vektoriai lygūs tada ir tik tada, kai atitinkamos jų koordinatės yra lygios. Vadinasi

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \ \lambda = \frac{y - y_1}{y_2 - y}, \ \lambda = \frac{z - z_1}{z_2 - z}.$$

Išsprendę nežinomuosius x, y, z gauname

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{5.6}$$

Iš paskutiniųjų lygčių gauname ieškomo taško koordinates. Pavyzdžiui, jeigu norime atkarpą dalyti pusiau, tai santykis $\lambda = 1$. Iš paskutiniųjų lygčių gauname, kad atkarpos vidurio taško koordinatės yra lygios:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Pabaigai pastebėsime, kad λ yra norimas atkarpų dalinimo santykis. Ją įrašę į (5.6) sistemą suskaičiuojame ieškomo taško koordinates. Beje, jeigu atkarpa plokštumoje, tereikia (5.6) sistemoje atmesti kintamąjį z. Jeigu atkarpa yra tiesėje, tai reikia praleisti ir kintamąjį y.

6. TIESĖS LYGTIS PLOKŠTUMOJE. PLOKŠTUMOS LYGTIS. TIESĖ ERDVĖJE

6.1 Tiesės lygtis plokštumoje

Laikysime, kad plokštumoje apibrėžta Dekarto koordinačių sistema. Tegu $\alpha = (a, b)$. Užrašykime tiesės, kuriai priklausytų taškas $X_0(x_0, y_0)$ ir kuri būtų statmena vektoriui α, lygtį. Sakykime, kad taškas $X(x, y)$ yra bet koks, laisvai pasirinktas, ieškomosios tiesės taškas. Tada vektorius $\overrightarrow{XX_0}$ priklauso tiesei. Vadinasi, pastarasis vektorius ir vektorius α yra statmeni. Kitaip tariant, taškas X priklausys iekomąjai tiesei, jeigu vektorius $(x - x_0, y - y_0)$ bus statmenas vektoriui α. Užrašykime šių vektorių statmenumo sąlygą:

$$\alpha \cdot \overrightarrow{XX_0} = a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \tag{6.1}$$

Tuomet pažymėję $c = -(ax_0 + by_0)$ gauname lygybę

$$ax + by + c = 0. \tag{6.2}$$

Vektorių $\alpha = (a, b)$ vadinsime tiesės normaliniu vektoriumi.

Paskutinioji lygtis yra vadinama bendrąja tiesės lygtimi, plokštumoje. Panagrinėkime šia tiesės lygtį kiek plačiau. Pastebėkime, kad jei duota koordinačių sistema, tai mes galime vektorių α "valdyti." Pavyzdžiui, pareikalaukime, kad ieškomąjai tiesei priklausytų koordinačių pradžios taškas ir visi kiti tiesės taškai priklausytų arba pirmąjam arba trečiąjam ketvirčiams. Šis reikalavimas ir atlieka vektoriaus α "valdymą", kadangi šiuo atveju tiesė su absice sudaro 45^0 laipsnių kampą, taigi vektorius α, būdamas statmenas ieškomąjai tiesei, su absise turi sudaryti, pavyzdžiui, 135^0 laipsnius (pastebėkime, kad duotai tiesei statmeną vektorių galime parinkti ne vieninteliu būdu !). Nesunku suprasti, kad šiuo atveju tinka vektorius $\alpha = (-a, a)$. Kadangi tiesei priklauso taškas $(0, 0)$, tai naudodami (6.1) lygybę gauname, tokią tiesės lygties formulę: $y = x$.

Jeigu vektorius, statmenas tiesei, yra vienetinis tuomet šio vektoriaus koordinatės yra lygios $\alpha_0 = (\cos\psi, \sin\psi)$. Pareikalavę, kad šis vektorius būtų statmenas tiesei, kuriai priklauso taškas (x_0, y_0), gauname taip vadinamą *normalinę tiesės lygtį*

$$\cos\psi x + \sin\psi y = x_0 \cos\psi + y_0 \sin\psi = p, \tag{6.3}$$

čia $p-$ yra atstumas nuo tiesės iki koordinačių pradžios taško O. Atkreipsime skaitytojo dėmesį į išties įdomų ir paprastą rezultatą. Bet apie viską iš eilės. Tarkime, kad taškas $X_0(x_0, y_0)$ nepriklauso tiesei. Žinome, kad vienetinio vektoriaus α_0 ir vektorius $\overrightarrow{OX_0}$ skaliarinė sandauga yra lygi vektoriaus $\overrightarrow{OX_o}$ projekcijai, vektoriaus α_0 kryptimi. (Laikykime, kad tiesė skiria taškus O ir X_0.) Pažymėkime šią projekciją raide l. Nesunku suprasti, kad skaičius $l = p + d$, kur p yra atstumas nuo koordinačių pradžios iki tiesės, o $d-$ atstumas nuo taško X_0 iki tiesės. Taigi, $(x_0, y_0) \cdot (\cos\psi, \sin\psi) = p + d$ arba

$$\cos\psi x_0 + \sin\psi y_0 = p + d \text{ arba } \cos\psi x_0 + \sin\psi y_0 - p = d. \tag{6.4}$$

Bet paskutinioji lygybė yra formulė, atstumui nuo bet kokio taško iki tiesės skaičiuoti. T.y., jei vietoje nežinomųjų x, y normalinėje tiesės lygties formulėje įrašysime taško koordinates, gausime atstumą d nuo to taško iki tiesės.

Išspręskime šį uždavinį bendrosios tiesės lygties atveju. Sakykime duota tiesės (6.1) lygtis. Kaip rasti atstumą nuo bet kokio taško iki šios tiesės? Užrašykime šios lygties normalinę lygtį! Kaip tai padaryti jau žinome. Reikia vienetinį vektorių, kolinerų vektoriui (a, b), skaliariškai padauginti su vektoriaus $(x - x_0, y - y_0)$. Bet vektoriui (a, b) kolinerus, vienetinis vektorius yra

$$\alpha_0 = \Big(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\Big).$$

Pastebėsime, kad šiuo atveju mes susiduriame su problema, t.y. vektorius $-\alpha$ taip pat kolinerus vektoriui (a, b). Tad kurį pasirinkti? Pasirinkimą nulems (6.4) lygybė. Kodėl? Mes turėdami bendrąją tiesės lygtį norime vektorių (a, b) "pritrumpinti " jį iki vienetinio. Taigi, visus lygties koeficientus dalijame iš skaičiaus $\pm|\alpha|$ taip, kad gautume (6.4) lygybės analogą. Bet (6.4) lygybėse dydis $-p-d$ yra neigiamas, kadangi $p, d > 0$. Todėl mums reikia parinkti tokį ženklą, kad

$$\frac{c}{\pm|\alpha|} < 0.$$

Skaičius

$$M = \frac{1}{\pm|\alpha|}$$

vadinamas normuojančiu daugikliu.

Tarkime, kad žinome du $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ plokštumos taškus. Kaip užrašyti tiesės lygtį, kuriai priklausytų šie du taškai. Visų pirma, ieškomosios tiesės bet kokį tašką pažymėkime $X(x, y)$. Tuomet nesunku suprasti, kad vektoriai $\overrightarrow{AX}$, ir $\overrightarrow{BX}$ yra kolinerūs. Taigi, naudodamiesi kolinerumo sąlyga gauname, kad egzistuoja realus skaičius $k \in \mathcal{R}$ toks, kad

$$(x - x_1, y - y_1) = k(x - x_2, y - y_2).$$

Iš paskutiniosios vektorinės lygybės gauname

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Paskutinioji lygybė reiškia tiesės, kuriai priklauso taškai A ir B, lygtį. Beje, jei kurio nors santykio vardiklyje skirtumas bus lygus nuliui tarkime, kad $y_2 - y_1 = 0$, tai reikš, kad tiesės taškų ordinatės yra pastovios, o tiesės lygtis yra $y = y_1$. Perrašę paskutiniąją lygybę tokiu būdu:

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = t, \ \frac{y - y_2}{y - y_1} = t$$

gauname taip vadinamą *parametrinę*, lygties plokštumoje, formą.

Rasime tiesės lygtį, jei žinoma, kad taškas $A(x_0, y_0)$ priklauso tiesei, be to kampas tarp tiesės bei absisių ašies yra θ.

Tarkime, kad $X(x, y)$ bet koks laisvai pasirinktas tiesės taškas. Tuomet $(x - x_0, y - y_0)$ priklauso tiesei. Antra vertus, bet koks vienetinis tiesės vektorius α_0 yra lygus

$$\alpha_0 = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}.$$

Tada vienetinis vektorius, statmenas tiesei yra, pavyzdžiui, toks

$$\beta_0 = \cos(90^0 + \theta)\mathbf{i} + \sin(90^0 + \theta)\mathbf{j} = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}.$$

Naudodamiesi (6.1) formule gauname, kad ieškomoji tiesės lygtis yra tokia:

$$-\sin\theta(x - x_0) + \cos\theta(y - y_0) = 0.$$

Sutvarkę šią lygybę gauname

$$y - y_0 = \tan\theta(x - x_0).$$

Pažymėję $\tan\theta =: k$, paskutiniąją lygybę perrašome taip

$$y - y_0 = k(x - x_0.) \tag{6.5}$$

Skaičius k yra vadinamas tiesės krypties koeficientu. Jeigu duota tiesės bendroji lygtis, tai tada

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Remdamiesi (6.5) lygtimi gauname, kad $k = -a/b$. Taigi, jei žinoma tiesės bendroji lygtis, tai nesunkiai galime rasti tiesės krypties koeficientą.

6.2 Tiesių tarpusavio padėtis

Šiame skyrelyje nagrinėsime galimas tiesių tarpusavio padėtis. Visų pirma nurodysime sąlygas, kuomet tiesės yra lygiagrečios arba statmenos.

Nesunku suprasti, kad jei tiesės lygiagrečios, tai šių tiesių normaliniai vektoriai yra kolinerūs. Sakykime tiesės apibrėžtos lygtimis

$$ax + by + c = 0,\ a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

Naudodamiesi vektorių kolinerumo salyga gauname, kad tiesės lygiagrečios tada ir tik tada, kai

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}.$$

Taigi, tiesės lygiagrečios, jeigu jų koeficientai yra proporcingi. Analogiškai, tiesės yra statmenos, jeigu statmeni jų normaliniai vektoriai, t.y.

$$aa_1 + bb_1 = 0.$$

Pastaroji lygybė yra tiesių *statmenumo sąlyga.*

Tikimės, kad skaitytojas dar prisimena, kad kampas tarp tiesių nusakomas ne vienareikšmiškai, jeigu tiesės ne statmenos ir ne lygiagrečios. Per daug savęs nevaržydami, kampu tarp tiesių pavadinkime kampą tarp šių tiesių normalinių vektorių, t.y.

$$\psi = \arccos\frac{aa_1 + bb_1}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a_1^2+b_1^2}}.$$

Aišku, kad jei dydis $\psi > 0$, tai tada pasirenkamas mažesnis iš kampų tarp tiesių ir jei $\psi < 0$, tai parenkamas didesnis iš kampų tarp tiesių.

Šio skyrelio pabaigai norėtume pateikti keletą pastabų. Visų pirma, jei norime rasti dviejų tiesių bendrą tašką, turime spręsti lygčių sistemą. Ieškomasis sistemos sprendinys ir bus susikirtimo taškas. Jei sistema sprendinių neturi, tai tiesės lygiagrečios.

Tarkime duotos dvi susikertančios tiesės:

$$ax + by + c = 0,\ a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

Raskime šių tiesių pusiaukampinės lygtį. Atkreipsime dėmesį, kad bet koks pusiaukampinės taškas turi savybę: - jis nuo abiejų tiesių nutolęs vienodu atstumu. Šį faktą ir išnaudosime. Tarkime, kad $X(x,y)$ yra bet koks laisvai pasirinktas pusiaukampinės taškas. Tada, kaip jau esame minėję, atstumas nuo šio taško iki abiejų kampo tiesių vienodi, t.y.

$$|aMx + bMy - p| = |a_1M_1x + b_1M_1y - p_1|.$$

Perrašę paskutiniąją lygybę gauname

$$(aM \pm a_1M_1)x + (bM \pm b_1M_1)y - (p \pm p_1) = 0,$$

kur ženklas "-" parenkamas tuo atveju, kai kampui, kurį dalija pusiaukampinė, priklauso koordinačių pradžios taškas, o kitu atveju imamas ženklas "+". Kodėl taip yra, siūlome panagrinėti skaitytojui.

6.3 Plokštumos lygtis

Sakykime, kad $\alpha = (a, b, c)$ vektorius, erdvėje. Tegu $X_0(x_0, y_0, z_0)$ koks nors fiksuotas erdvės taškas. Pareikalaukime, kad ieškomąjai plokštumai priklausytų taškas X_0 ir be to plokštuma būtų statmena vektoriui α. Tuomet bet koks ieškomosios plokštumos vektorius $\overrightarrow{XX_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ turi būti statmenas vektoriui α. Taigi

$$\alpha \cdot \overrightarrow{XX_0} = (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0. \tag{6.6}$$

Iš pastarosios lygybės gauname bendrąją plokštumos lygtį

$$ax + by + cz + d = 0. \tag{6.7}$$

Vektorių α vadinsime plokštumos normaliniu vektoriumi. Jeigu vektorius, statmenas plokštumai, vienetinis

$$\alpha_0 = (\cos\psi_1, \cos\psi_2, \cos\psi_3),$$

čia ψ_1, ψ_2, ψ_3 yra kampai, kuriuos vektorius sudaro su koordinatinėmis ašimis Ox, Oy, Oz, atitinkamai, tuomet gauname plokštumos lygtį

$$x\cos\psi_1 + y\cos\psi_2 + z\cos\psi_3 = p,$$

kurią vadinsime normaline, čia $p-$ atstumas nuo koordinačių pradžios iki plokštumos.

Analogiškai, kaip ir tiesės plokštumoje atveju, norint iš bendrosios tiesės lygties (žr. 6.3) gauti normalinę, mums tereikia vektorių α "sutrumpinti" iki vienetinio. Tai atliekame vektoriaus koordinates dalindami iš dydžio

$$M := \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Ženklas parenkamas taip, kad dydis $dM < 0$. Samprotavimai visiškai analogiški kaip ir tiesės plokštumoje atveju. Siūlome skaitytojui pačiam tai panagrinėti.

Rasime formulę atstumui nuo taško iki plokštumos skaičiuoti. Prisiminkime, kad bet kokį vektorių daugindami (skaliariškai) iš vienetinio, gauname pirmojo vektoriaus projekciją vienetinio kryptimi. Tarkime, kad $A_0(x_0, y_0, z_0)$ yra bet koks erdvės taškas. Tada skaliarinė sandauga

$$\overrightarrow{OA} \cdot \alpha_0 = p + d,$$

kur p yra atstumas nuo koordinačių pradžios iki plokštumos, o d yra atstumas nuo taško A_0 iki plokštumos, laikykime, kad plokštuma skiria taškus O ir A. Tai užtikrina, kad skaliarinė sandauga bus teigiama. (O kaip bus, jei taškai O ir A_0 yra toje pat plokštumos pusėje!) Bet paskutinioji sakliarinė sandauga (kairioji jos pusė) yra lygi normalinei plokštumos lygties formai, kai vietoje nežinomųjų įrašytos taško A_0 koordinatės, taigi

$$x_0 \cos \psi_1 + y_0 \cos \psi_2 + z_0 \cos \psi_3 = p + d.$$

Iš paskutiniosios lygybės gauname formulę taško atstumui iki plokštumos rasti. Kitaip tariant, norint rasti atstumą nuo taško iki plokštumos, mums reikia iš bendrosios plokštumos lygties gauti normalinę. Po to, įrašę nagrinėjamo taško koordinates į normalinę plokštumos lygtį, gausi me kokį nors skaičių. Šio skaičiaus absoliutinė reikšmė ir bus atstumas nuo taško iki plokštumos.

Kampu tarp dviejų plokštumų laikysime kampą tarp šių plokštumų normalinių vektorių.

Taigi, kampo tarp dviejų plokštumų

$$ax + by + cz + d = 0, \; a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

kosinusas yra lygus

$$\cos \psi = \frac{aa_1 + bb_1 + cc_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}.$$

Iš pastarosios lygybės gauname, kad *plokštumos statmenos*, jeigu $aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$. Aišku, kad plokštumos lygiagrečios, jeigu jų normaliniai vektoriai yra kolinerūs, todėl *plokštumų lygiagretumo* salygą galime užrašyti taip:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Nesunku suprasti, kad plokštuma lygiagreti kuriai nors koordinatinei plokštumai, tarkime Oxy tada ir tik tada, kai jos lygtyje koeficientai prie kintamųjų x, y yra lygūs nuliui. Visai analogiškai, plokštuma lygiagreti koordinatinei ašiai, tarkime Oy, jeigu koeficientas, plokštumos lygtyje prie nežinomojo y yra lygus nuliui.

Rasime trijų plokštumų bendrą tašką, jeigu jis egzistuoja. Norint atsakyti į šį klausimą, mes turime išspręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0. \end{cases}$$

Žinome, kad ši sistema gali būti nesuderinta arba suderinta. Paskutiniuoju atveju, sistema gali turėti vieną arba begalo daug sprendinių. Beje, tuo atveju kai sistema nesuderinta, taipogi galima kai ką pasakyti apie plokštumų tarpusavio padėtį. Aptarkime šias galimybes.

1. Jeigu sistema suderinta, ir apibrėžta, tai lygčių sistemos determinantas D yra nelygus nuliui. Tad naudodamiesi, pavyzdžiui, Kramerio formulėmis gauname šios sistemos sprendinį:

$$x = \frac{D_1}{D},\ y = \frac{D_2}{D},\ z = \frac{D_3}{D}, \tag{6.8}$$

kur $D_i,\ i = 1, 2, 3$ yra sistemos determinantai, kuriuose $i-$ asis stulpelis pakeistas laisvųjų narių stulpeliu.

2. Jeigu $D = 0$, ir bent vienas iš $D_i \neq 0,\ i = 1, 2, 3$, tai tada galime tokie atvejai

1) D neturi dviejų proporcingų eilučių, t.y. sistemoje nėra dviejų lygiagrečių plokštumų, šiuo atveju trys plokštumos kas dvi kertasi lygiagrečiomis tiesėmis;

2) D turi dvi proporcingas eilutes, taigi šiuo atveju dvi plokštumos lygiagrečios, o trečioji nėra lygiagreti joms.

3. $D = 0$ ir visi skaitikliai lygūs nuliui. Šiuo atveju susikirtimo taškai neapibrėžti, vadinasi plokštumos turi ne vieną susikirtimo tašką, jos susikerta vienoje tiesėje arba plokštumoje. Skirsime šiuos atvejus:

1) D neturi proporcingų eilučių. Plokštumos nėra lygiagrečios, bet visos susikerta tiesėje;

2) D dvi eilutės proporcingos, ir atitinkamos dvi plokštumos sutampa, bet trečioji joms nelygiagreti;

3) D visos eilutės proporcingos, bet visos plokštumos skirtingos. Tuomet jos visos yra lygiagrečios;

4) D visos eilutės proporcingos bet dvi plokštumos sutampa, o trečioji skirtinga;

5) D visos eilutės proporcingos, tada visos plokštumos sutampa.

Taigi, aptarėme galimas trijų plokštumų tarpusavio padėtis.

6.4 Tiesė erdvėje

Praeitame skyrelyje mes pastebėjome, kad dviejų plokštumų susikirtimo rezultatas yra tiesė, būtent:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Šią sistemą vadinsime *bendrąja tiesės lygties forma* erdvėje.

Antra vertus, tiesę erdvėje galime apibrėžti jau mums pažįstamu, vektoriniu būdu. Tarkime, kad $\overrightarrow{s} = (l, m, n)$ yra vektorius, o taškas (x_0, y_0, z_0) priklauso ieškomąjai tiesei, kuri lygiagreti fiksuotam vektoriui $\overrightarrow{s}$. Tarkime, kad taškas (x, y, z) yra, bet koks, laisvai pasirinktas, šios tiesės taškas. Tuomet vektoriai $\overrightarrow{s}$ ir $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ yra kolinerūs. Taigi, teisingi tokie sąryšiai:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t.$$

Pastaroji lygtis vadinama tiesės *kanonine lygtimi*. Vektorių $\overrightarrow{s}$ vadinsime, tiesės erdvėje, *lydinčiu vektoriumi*. Matome, kad užrašyti tiesės kanoninę lygtį mums pakanka žinoti tašką, kuris priklauso tiesei ir vektorių, kuriam lygiagreti ieškomoji tiesė. Pasinaudosime šia pastaba, užrašydami tiesės, per du taškus, lygtį erdvėje.

Tarkime, kad duoti du taškai (x_1, y_1, z_1) ir (x_2, y_2, z_2). Pareikalaukime, kad šie taškai priklausytų ieškomąjai tiesei. Pažymėkime

$$\overrightarrow{s} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Tegu (x, y, z), bet koks laisvai pasirinktas tiesės taškas. Tada naudodamiesi tiesės kanonine forma gauname, kad

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Tai tiesės, per du taškus erdvėje, lygtis.

Iš kanoninės tiesės lygties gauname taip vadinamą parametrinę tiesės lygties formą:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

Aptarsime metodą, kaip iš bendrosios tiesės lygties formos gauti kanoninę.

Tarkime, kad duota bendroji tiesės lygtis

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases} \tag{6.9}$$

Norint užrašyti kanoninę tiesės lygties formą mes galima elgtis dvejopai: pirma, rasti du taškus, kurie priklauso plokštumų susikirtimo tiesei ir užrašyti tiesės, kuriai priklauso šie du taškai, lygtį (tai jau žinome kaip atlikti). Norint rasti plokštumų susikirtimo tiesei priklausantį tašką, pakanka vienam iš nežinomųjų parinkti konkrečią reikšmę ir ja pakeisti parinktą nežinomąjį (6.9) lygčių sistemoje. Gausime dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą, kurią išsprendę gausime kitų nežinomųjų skaitines reikšmes. Gautosios reikšmės, kartu su parinktąja nežinomojo reikšme priklausys plokštumų susikirtimo tiesei. (Įsitikinkite tuo!)

Antrasis būdas, kaip rasti tiesės kanoninę lygties formą yra toks: raskime vieną tašką priklausantį plokštumų susikirtimo tiesei, o reikiamas vektorius $\overrightarrow{s}$ gali būti gautas vektoriškai sudauginus plokštumų normalinius vektorius $\alpha_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ir $\alpha_2 = (a_2, b_2, c_2)$, (kodėl?) t.y.

$$\overrightarrow{s} = \alpha_1 \times \alpha_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Aptarsime tiesių tarpusavio padėtį erdvėje. Dvi tiesės erdvėje gali būti lygiagrečios, prasilenkiančios arba gali kirstis. Viena svarbiausių tiesių tarpusavio padėties charakteristikų yra kampas tarp jų. Kampu tarp tiesių vadinsime kampą tarp šias tiesias lydinčių vektorių.

Jeigu $\overrightarrow{s_1} = (l_1, m_1, n_1)$, o $\overrightarrow{s_2} = (l_2, m_2, n_2)$ tai tada kampas tarp tiesių randamas sprendžiant lygtį:

$$\cos\psi = \frac{\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}||\overrightarrow{s_2}|}.$$

Tad dvi tiesės statmenos, jeigu

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Tiesės lygiagrečios, jeigu jas lydintys vektoriai yra lygiagretūs. Tada lygiagretumo sąlygą galime užrašyti taip:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Aišku, kad erdvėje statmenos tiesės nebūtinai susikerta. O kokia gi sąlygos turi būti išpildytos, kad tiesės kirstųsi arba būtų prasilenkiančios?

Pastebėsime, kad jeigu tiesės yra prasilenkiančios, tai tada jas lydintys vektoriai nebus vienoje plokštumoje. O tai reiškia, kad

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

beto (x_1, y_1, z_1) ir (x_2, y_2, z_2) yra skirtingų tiesių taškai.

Tuo atveju, kai $\Delta = 0$, tai tiesės priklausys vienai plokštumai t.y., jos arba kirsis arba bus lygiagrečios.

Tarkime, kad plokštumai priklauso dvi tiesės, kurių lydintys vektoriai yra $\overrightarrow{s_1}$ ir $\overrightarrow{s_2}$. Tada plokštumą lydintis vektorius yra lygus $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}$. Norint rasti tiesių, erdvėje, susikirtimo tašką pakanka išspręsti lygčių sistemą, kurią sudarytų dydžiai, priklausantys abiems tiesėms, pavyzdžiui

$$\begin{cases} \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1}, \\ \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \\ \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2}. \end{cases}$$

Jeigu norime rasti tiesės ir plokštumos bendrą tašką, mums teks išspręsti sistemą

$$\begin{cases} x = x_1 + lt, \\ y = y_1 + mt, \\ z = z_1 + nt, \\ ax + by + cz + d = 0. \end{cases}$$

Jeigu tiesės yra lygiagrečios, tai plokštumos, kurioje yra šios tiesės, normalinį vektorių $\overrightarrow{n}$ galime rasti tokiu būdu:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{M_1 M_2},$$

čia $\overrightarrow{s_1}$ yra vienos iš tiesių lydintis vektorius, o taškai M_1 ir M_2 priklauso skirtingoms tiesėms.

Norint rasti tiesės erdvėje kokį nors tašką, pakanka parametrinėje lygties formoje parinkti konkrečią t reikšmę ir suskaičiuoti šią reikšmę atitinkančias x, y, z reikšmes. Tai ir bus taško, priklausančio tiesei, koordinatės.

Kaip skaičiuoti kampą tarp tiesės ir plokštumos? Tarkime, kad plokštumos normalinis vektorius yra $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$, o tiesę lydintis vektorius yra (l, m, n). Visų pirma pastebėsime, kad jeigu tiesė yra statmena plokštumai, tai plokštumos normalinis vektorius ir tiesę lydintis vektoriai yra lygiagretūs. Tad tiesės ir plokštumos statmenumo sąlygą galime užrašyti taip:

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}.$$

Aišku, kad jei tiesė ir plokštuma yra lygiagrečios, tai plokštumos normalinis ir tiesę lydintis vektoriai yra statmeni, vadinasi tiesės ir plokštumos lygiagretumo sąlyga yra tokia:

$$la + mb + nc = 0.$$

Aptarkime kaip apskaičiuoti kampą tarp tiesės ir plokštumos. Visų pirma, kampas tarp tiesės ir plokštumos, tai kampas tarp tiesės ir jos projekcijos plokštumoje. Tačiau pagrindinis plokštumą charakterizuojantis dydis yra jos normalinis vektorius. Aišku, kad plokštumos normalinis vektorius ir tiesės projekcija plokštumoje yra statmeni. Vadinasi, jeigu kampas tarp tiesės ir plokštumos normalinio vektoriaus yra lygus $90^0 - \psi$, tai tada kampas tarp tiesės ir plokštumos lygus ψ. Tada kampas tarp tiesės ir plokštumos bus skaičiuojamas tokiu būdu:

$$\cos\{90^0 - \psi\} = \sin\psi = \frac{al + bm + cn}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

7. ANTROS EILĖS KREIVĖS

7.1 Antros eilės kreivių lygtys

Tarkime, kad plokštumoje apibrėžta Dekarto koordinačių sistema. Vadinasi, tarp plokštumos taškų ir realiųjų skaičių porų (x, y) apibrėžta bijekcija. Šioje porų aibėje (to pačiu galime sakyti, kad plokštumos taškų aibėje) apibrėžkime funkciją $F(x, y) = 0$. Šios funkcijos apibrėžimo sritį vadinsime plokštumos kreive. Pavyzdžiui tiesė $ax + by + c = 0$ yra plokštumos kreivė. Tiesė yra vadinama pirmos eilės kreive, kadangi nežinomieji, šioje lygtyje, yra pirmojo laipsnio. Kreives, kurių lygtys yra atskiri, žemiau pateiktos lygybės

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{7.1}$$

atvejai, vadinsime antros eilės kreive. (7.1) lygybę vadinsime bendrąją, antrosios eilės kreivės, lygtimi. Beje, jeigu lygtis nusako antrosios eilės kreivę, tai koeficientai a, b, c visi kartu negali būti lygūs nuliui (priešingu atveju turėsime pirmos eilės kreivę). Trumpai tariant, kreivės laipsnį nusako aukščiausias nežinomųjų laipsnis, esantis (7.1) lygtyje.

Kiek plačiau panagrinėkime antrosios eilės kreivę. Tarkime, kad (7.1) lygtyje koeficientai $b = d = e = 0,\ c = a = f = 1$. Tuomet minėtoji lygtis atrodo taip:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

Bet iš patirties jau žinome, kad nėra plokštumoje taškų, kurių koordinatės būtų šios lygybės sprendiniai.

Tarkime kad $a = 1,\ b = c = d = e = 0,$ ir $f = -4$. Tuomet (7.1) taps tokia lygtimi,

$$x^2 - 4 = 0, \quad \text{arba} \quad (x-2)(x+2) = 0.$$

Išsprendę šią lygtį gauname, kad nagrinėjamą plokštumos taškų aibę (kreivę) sudaro dviejų tiesių $x = 2,\ x = -2$, sąjunga.

Apibrėžimas Apskritimu vadinsime plokštumos taškų, kurie nutolę nuo fiksuoto taško vienodu atstumu, aibę.

Tarkime duotas fiksuotas taškas (a, b), o plokštumos taškai (x, y) nutolę nuo šio taško atstumu r. Naudodamiesi atstumo tarp dviejų taškų formule gauname apskritimo lygtį

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r, \quad \text{arba} \quad (x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2. \tag{7.2}$$

Pastarąją lygtį vadinsime normaliąja apskritimo lygtimi. (7.2) lygybės kairiosios pusės abu dėmenis pakėlę kvadratu, bei visus narius sukėlę į vieną pusę gauname

$$x^2 + y^2 - 2xa - 2yb + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Plokštumos taškas (a, b) yra vadinamas apskritimo centru, o $r-$ apskritimo spinduliu. Nesunku suprasti, kad apskritimas yra antros eilės kreivė. Beje, jeigu duota bendroji antros eilės kreivės lygtis, tai ji bus apskritimo lygtis tada ir tik tada, kai $a = c,\ b = 0$. Šio teiginio teisingumą į vieną pusę jau įrodėme. Parodysime, kad bendroji antros eilės kreivė su nurodytais koeficientais yra apskritimo lygtis, jeigu išpildyta viena papildoma salyga.

Padaliję (7.1) lygybės abi puses iš a perrašykime ją taip:

$$x^2 + 2(\frac{d}{2a})x + \frac{d}{2a}^2 + y^2 + 2(\frac{e}{2a})y + \frac{e}{2a}^2 + \frac{f}{a} - \frac{d}{2a}^2 - \frac{e}{2a}^2 = 0.$$

Iš pastarosios lygybės gauname

$$(x - \frac{d}{2a})^2 + (y - \frac{e}{2a})^2 = m,$$

čia

$$m = \frac{f}{a} - \frac{d}{2a}^2 - \frac{e}{2a}^2 = 0.$$

Nesunku suprasti, kad aukščiau minėtoji sąlyga yra tokia: $m > 0$. Priešingu atveju antros eilės kreivės sprendinių aibė yra tuščia.

Elipsė

Apibrėžimas Elipse vadinsime plokštumos taškų aibę, kurios kiekvieno taško atstumų nuo dviejų fiksuotų plokštumos taškų suma yra pastovus dydis.

Apibrėžime minimus du fiksuotus taškus vadinsime *elipsės židiniais* ir žymėsime raidėmis F_1, F_2. Tarkime, kad atstumas tarp židinių yra lygus $2e$, o bet kurio elipsės taško $E(x, y)$ atstumų iki židinių suma, yra lygi $2a$. Dekarto koordinačių sistemos koordinatines ašis parinkime taip, kad ašiai Ox priklausytų taškai F_1, F_2, o koordinatinės ašies ir vektoriaus Ox kryptys sutampa ir koordinatinė ašis Oy atkarpą $|F_1F_2|$ dalija pusiau. Kitaip tariant, $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$. Aišku, kad bet kokiam elipsės taškui $E(x, y)$ teisinga lygybė:

$$|F_1E| + |F_2E| = 2a.$$

Šią lygybę galime perrašyti ir taip:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Kadangi trikampio kraštinių ilgių suma yra didesnė už trečiosios kraštinės ilgį, tai $c < a$. Todėl pažymėję $b^2 := a^2 - c^2$, bei pertvarkę paskutiniąją lygtį, gauname tokią lygybę:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Paskutinioji lygybė vadinama elipsės kanonine lygtimi. Skaičiai a ir b vadinami *elipsės pusašėmis*, o skaičius $\epsilon = c/a$ yra vadinamas *elipsės ekscentricitetas*. Ekscentritetas nusako elipsės formą, beje, skaičiai a ir b taip pat nusako elipsės "ištempimo dydį" koordinatinėse ašyse. Matome, kad jei $\epsilon = 0$, tai tada elipsė išsigimsta į apskritimą.

Hiperbolė.

Apibrėžimas Hiperbole vadinsime plokštumos taškų aibę, kurių atstumų nuo dviejų pastovių taškų skirtumas yra pastovus, absoliutiniu didumu, dydis.

Analogiškai kaip ir elipsės atveju, šiuos pastovius taškus, F_1 ir F_2 vadinsime *hiperbolės židiniais*, pastovų skirtumą, minimą apibrėžime žymėkime $2a$, o atkarpos ilgį $|F_1F_2| = 2c$. Nesunku suprasti, kad šiuo atveju $c > a$. Tuo atveju, kai $c = a$, tai aibę plokštumos taškų, kurie turi minėtąją savybę, sudarys visi tiesės Ox taškai, išskyrus atkarpos $|F_1F_2|$ taškus. Šį atvejį išskirsime ir atskirai nenagrinėsime.

Kaip ir elipsės atveju užrašysime hiperbolės lygtį, parinkę koordinačių sistemą tokiu būdu: koordinačių pradžios tašką parenkame atkarpos F_1F_2 vidurio taške, Ox ašimi tiesę, kuriai priklauso taškai F_1, F_2. Tada, $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$. Aišku, kad bet kokiam hiperbolės taškui $H(x, y)$ teisinga lygybė:

$$|F_1H| - |F_2H| = 2a.$$

Šią lygybę galime perrašyti ir taip:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Kadangi $c > a$ tai $a^2 - b^2 < 0$. Todėl pažymėję $-b^2 := a^2 - c^2$, ir pertvarkę, paskutiniąją lygtį, galime gauti lygybę:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Paskutinioji lygtis vadinama hiperbolės kanonine lygtimi. Kaip ir elipsės atveju, skaičius c yra vadinamas hiperbolės *tiesiniu ekscentritetu.*

Pastebėsime, kad hiperbolės lygtyje figūruoja dviejų kvadratų skirtumas. Todėl, jei kurį nors kintamąjį didiname, tada norint, kad kvadratų skirtumas išliktų pastovus, tenka didinti ir kitą kintamąjį. Taigi, x neaprėžtai didėjant, turi didėti ir y, ir atvirkščiai. Dar daugiau, kintamąjam neaprėžtai didėjant hiperbolė artėja prie tam tikrų tiesių, kurios yra vadinamos hiperbolės asimptotėmis. Šių tiesių lygtys yra

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Elipsės bei hiperbolės liestinės ir normalės

Tiesę, kuriai priklauso du kreivės taškai vadinsime kreivės kirstine, o tiesę, kuriai priklauso vienas kreivės taškas, vadinsime šios kreivės liestine. Tarkime kirstinė kerta tiesę taškuose $A(x_1, y_2)$, $B(x_2, y_2)$. Visų pirma rasime elipsės liestinės, kuriai priklauso taškas (x_1, y_1), lygtį. Tarkime, kad kirstinei priklauso taškai A, B. Tuomet šios kirstinės lygtis yra tokia:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

arba perrašę kitaip turėsime:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Antra vertus, taškai A, B priklauso elipsei, taigi

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1.$$

Atėmę iš pirmosios lygties antrąją gauname tokią lygybę:

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0.$$

Remdamiesi paskutiniąja lygybe, kirstinės lygtį perrašome taip:

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}(x - x_1).$$

Tarkime, kad taškas (x_2, y_2), elipse artėja prie taško (x_1, y_1). Tuomet x_2 artėja prie x_1, o y_2 artėja prie y_1. Įrašę į paskutiniąją kirstinės lygtį $x_2 = x_1,\ y_2 = y_1$ gauname

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

arba

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}.$$

Kadangi taškas (x_1, y_1) priklauso elipsei, tai paskutiniosios lygybės dešinioji pusė yra lygi vienetui, t.y. gauname tokią elipsės liestinės lygtį:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Samprotaudami visiškai analogiškai galime įrodyti, kad hiperbolės liestinės lygtis gali būti tokia:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Kreivės normale vadinsime tiesę, kuri yra statmena liestinei lietimosi taške. Jeigu liestinė kreivę liečia taške (x_1, y_1), tai tada normalės lygtis yra tokia:

$$y - y_1 = m(x - x_1), \text{ čia } m = \pm\frac{a^2}{b^2}\frac{y_1}{x_1}.$$

Taigi, normalės lygtį galime perrašyti ir taip:

$$y - y_1 = \pm\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$$

arba

$$\frac{a^2 x}{x_1} \pm \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 \pm b^2,$$

čia viršutinis ženklas imamas elipsės atveju, o apatinis - hiperbolės. Pažymėję

$$a^2 - b^2 = c^2; (a > b) \text{ elipsės atveju, } a^2 + b^2 = c^2$$

hiperbolės atveju, gauname normalių lygtis elipsės bei hiperbolės atveju, atitinkamai:

$$\frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} = c^2, \ \frac{a^2 x}{x_1} + \frac{b^2 y}{y_1} = c^2.$$

Parabolė

Apibrėžimas Parabole vadinsime plokštumos taškų aibę, kurių kiekvieno atstumai nuo pastovaus taško ir pastovios tiesės yra lygūs.

Šį pastovų tašką vadinsime *parabolės židiniu* ir žymėsime raide F, o pastovią tiesę vadinsime *parabolės direktrise*.

Tarkime, kad koordinačių pradžios taškas yra iš židinio F nuleisto į direktrisę statmens vidurio taškas O; Ox ašis yra tiesė, kuriai priklauso taškai O ir F. Tuomet židinio koordinatės yra $F(p/2, 0)$, o direktrisė yra lygiagreti y ašiai ir nutolusi nuo jos į kairę pusę

$p/2$ atstumu. Tada bet kokio kreivės taško $P(x, y)$ atstumas iki židinio ir iki direktrisės sutampa, vadinasi teisinga lygybė:

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Pertvarkę paskutiniąją lygybe gauname lygtį,

$$y^2 = 2px, \text{ arba } y = \pm\sqrt{2px},$$

kurią vadinsime kanonine parabolės lygtimi.

Parabolės liestinės bei normalės. Tarkime, kad $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ yra du parabolės taškai. Vadinasi

$$y_1^2 = 2px_1, \; y_2^2 = 2px_2.$$

Atėmę iš antrosios lygties pirmąją gauname

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_1 + y_2}.$$

Pastebėsime, kad paskutiniosios lygybės kairėje pusėje esantis santykis yra kirstinės, kuriai priklauso taškai A, B, krypties koeficientas. Tuomet pažymėję minėtąjį santykį raide m, šią lygybę perrašome taip:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{m}.$$

Pastebėsime, kad jeigu taškas B artėja prie taško A, tai šiuo atveju kirstinė virsta liestine, kurios krypties koeficientas yra lygus

$$m = \frac{p}{y_1}.$$

Tuomet liestinės, kuriai priklauso taškas A, ir kurios krypties koeficientas yra p/y_1, bus tokia

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1) \text{ arba } \; yy_1 - y_1^2 = px - px_1.$$

Kadangi taškas A priklauso parabolei, tai $y_1^2 = 2px_1$. Naudodamiesi šia pastaba gauname tokią liestinės lygtį:

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Raskime parabolės normalės lygtį. Žinome, kad normalė, tarkime taške A, yra tiesė, statmena liestinei tame pat taške. Taigi, normalė krypties koeficientas yra $m_1 = -y_1/p$. Todėl normalės lygtis yra

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1), \; \text{ arba } \; y_1(x - x_1) + p(y - y_1) = 0.$$

Uždaviniai

Vektoriai

1. Lygiagretainio $ABCD$ įstrižainės susikerta taške M. Naudodami vektorių veiksmus užrašykite vektorių $\overrightarrow{MD}$ vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$.

2. Duoti vektoriai $\alpha = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ ir $\beta = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Raskite vektoriaus $\delta = 2\beta - \alpha$ ilgį, jo vienetinį vektorių, bei kampus, kuriuos vektorius sudaro su koordinatinėmis ašimis.

3. Raskite du taškus, kurie atkarpą AB, $A(1, -3, 4)$, $B(4, 3, 2)$ dalija į tris lygias dalis.

4. Taškai $A(-1, -3)$, $D(-2, 0)$ yra dvi gretimos kvadrato $ABCD$ viršūnės. Raskite likusių viršūnių koordinates.

5. Tarkime, kad duoti du vektoriai: $\alpha = (4, 1, -2)$ ir $\beta = (0, -3, 1)$. Raskite šių vektorių skaliarinę bei vektorinę sandaugas, kampą tarp vektorių, bei vektoriaus α projekciją vektoriaus β kryptimi.

6. Kokia turi būti parametro m reikšmė, kad kampas tarp vektorių $\alpha = (-2, m, 0)$ ir $\beta = (-2, 0, 2)$ būtų lygus 60^0.

7. Taškai

$$A(1, -1, 2),\ B(4, -6, 1),\ C(2, 1, 0)$$

yra lygiagretainio viršūnės. Raskite lygiagretainio aukštines, bei kampą tarp lygiagretainio įstrižainių.

8. Tarkime, kad vektoriai

$$\alpha = (-2, -3, 5),\ \beta(7, -3, 1),\ \gamma = (2, -3, 5)$$

yra trikampės piramidės briaunos. Apskaičiuokite šios piramidės tūrį.

9. Ar duotieji taškai yra vienoje plokštumoje?

$$(2, 3, 9),\ (-8, 3, -1),\ (1, 0, 2),\ (-5, 1, -2).$$

10. Tarp vektorių α ir β yra 45^0 kampas. Be to žinoma, kad $|\alpha| = 2$, o $|\beta| = 5$. Apskaičiuokite vektoriaus

$$(2\alpha - \beta) \times (\alpha - 2\beta)$$

ilgį.

11. Duoti trys taškai

$$A(-6, 5),\ B(3, -2),\ C(0, -1).$$

Raskite tašką vienodai nutolusį nuo duotųjų taškų.

12. Per taškus

$$A(-1, 3),\ B(0, 2),\ C(1, -1)$$

nubrėžtas apskritimas. Raskite šio apskritimo centrą bei spindulį.

Tiesės lygtis plokštumoje. Antros eilės kreivės. Plokštuma ir tiesė erdvėje.

1. Kokia turi būti parametro a reikšmė, kad tiesės

$$2x - ay + 5 = 0,\ x + 3y - 4 = 0$$

būtų: a) lygiagrečios; b) statmenos; c) sudarytų 45^0 kampą.

Užrašykite antrosios tiesės kryptinę, ašinę, bei normaliąją lygties formas.

2. Yra žinoma, kad tiesei priklauso taškas $(2,3)$ ir be to ieškomoji tiesė su tiese $9x - 3y + 2 = 0$ sudaro kampą, kuris lygus $\arctan(5/2)$. Sudarykite šios tiesės lygtį.

3. Duota tiesė $3x - 5y - 21 = 0$ ir taškas $(5, -8)$. Raskite šio taško projekciją duotoje tiesėje, bei šiam taškui simetriško, šios tiesės atžvilgiu, taško koordinates.

4. Jei tiesės $x - y = 0$ ir $-3x + 3y = 8$ yra lygiagrečios, tai raskite atstumą tarp jų.

5. Sakykime, kad trikampio viršūnių koordinatės yra tokios:

$$A(2, -3),\ B(3, 3),\ C(-1, 4).$$

Sudarykite a) kraštinės BC, b) pusiaukraštinės BE, c) aukštinės BH, d) vidurio linijos, lygiagrečios kraštinei BC, e) kampo B pusiaukampinės, lygtis.

6. Tarkime, kad duotos trikampio kraštinių lygtys:

$$4x - y - 7 = 0(AB),\ x + 3y - 31 = 0(BC),\ x + 5y - 7 = 0(CA).$$

Raskite: a) pusiaukraštinės BE ilgį, b) aukštinės BH ilgį, c) kampo ABC dydį, d) trikampio plotą, e) apibrėžtinio apskritimo centrą bei spindulį.

7. Raskite apskritimo

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0$$

spindulį bei centro koordinates. Nubraižykite šį apskritimą.

8. Tarkime, kad apskritimui priklauso trys taškai

$$(-4, -7),\ (-8, -3),\ (-4, 1).$$

Sudarykite šio apskritimo bendrąją bei kanoninę lygtis.

9. Sudarykite apskritimo

$$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$$

liestinių, kurios būtų lygiagrečios tiesei $2x + 4y - 7 = 0$, lygtis.

10. Raskite elipsės bei hiperbolės

$$x^2 + 25y^2 = 25,\ \frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{4} = 1$$

pusašes, viršūnių bei židinių koordinates, atstumus tarp židinių, bei ekscentricitetus, liestinių bei normalių lygtis, taškuose (0,1), (2,3), atitinkamai. Be to raskite hiperbolės asimptotes. Nubraižykite šias kreives.

11. Raskite parabolės

$$y^2 = -4x + 8$$

židinio ir viršūnės koordinates, direktrisę, liestinės bei normalės lygtis, taške (1,2). Nubraižykite šią kreivę.

12. Raskite tiesės $2x - 3y + 2 = 0$ ir hiperbolės

$$4x^2 - 9y^2 = 36$$

susikirtimo taškus, bei nubraižykite šias kreives.

13. Sudarykite lygtį hiperbolės, kurios ekscentricitetas $\epsilon = 2$, o jos židiniai sutampa su elipsės

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

židiniais.

14. Raskite parabolės $y^2 = 2px$ parametro p reikšmę, jeigu parabolė tiesėje $y = x$ atkerta $4\sqrt{2}$ ilgio atkarpą.

15. Sudarykite plokštumų, kurios tenkina sąlygas: a) plokštumai priklauso taškas $(1, 2, -4)$, o ji statmena vektoriui $\alpha = (-3, 2, -4)$; b) plokštumai priklauso taškai

$$(-2, 1, -1),\ (-1, -3, 2),\ (4, 2, -1);$$

c) plokštumai priklauso taškas $(1, -2, -1)$, o ji lygiagreti plokštumai

$$x - y + 2z - 3 = 0;$$

d) plokštumai priklauso taškas $(-3, 3, 2)$, o ji statmena susikertančioms plokštumoms

$$x + 2y - 3z - 4 = 0,\ 2x - 5y - z + 3 = 0,$$

lygtis.

16. Jei plokštumos

$$3x - 2y - 6z + 3 = 0,\ -3x + 2y + 6z - 1 = 0$$

yra lygiagrečios, tai raskite atstumą tarp jų. Kokiuose taškuose pirmoji plokštuma kerta koordinatines ašis?

17. Kokios turi būti parametrų m ir n reikšmės, kad plokštumos

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 6, \\ 4x + y + 3z = n, \\ x + y - mz = 1, \end{cases}$$

a) turėtų vieną bendrą tašką; b) eitų per vieną tiesę; c) poromis kirsdamosi sudarytų tris lygiagrečias tieses.

18. Sudarykite tiesių erdvėje a) kuriai priklauso taškas $(2, -2, 3)$ ir kuri lygiagreti vektoriui $\alpha = (4, -6, 3)$; b) per du taškus $(-3, 1, -4)$ ir $(5, -1, 1)$, lygtis.

19. Raskite tiesės

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0, \end{cases}$$

parametrines bei kanonines lygtis. Raskite kampą tarp šių plokštumų.

20. Jeigu tiesės yra prasilenkiančios, tai raskite atstumą bei kampą tarp šių tiesių:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0, \end{cases}$$

ir

$$\begin{cases} x = -2t - 3, \\ y = -4, \\ z = 3t + 2. \end{cases}$$

21. Raskite plokštumos $x - 3y - z + 5 = 0$ ir tiesės

$$\begin{cases} x - y + 6z - 7 = 0, \\ x + 2y - 3z + 1 = 0, \end{cases}$$

bendrus taškus, jei jie egzistuoja.

22. Sudarykite plokštumos, a) kuriai priklauso taškas $(1, 4, -3)$ ir tiesė

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$$

b) kuriai priklauso taškas $(1, 4, -3)$ ir lygiagreti tiesėms

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1},$$

$$\begin{cases} x = -2t - 3, \\ y = -4, \\ z = 3t + 2, \end{cases}$$

lygtis.

23. Sudarykite plokštumos, kuriai priklauso dvi lygiagrečios tiesės

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{6} = \frac{z-4}{-8} \text{ ir } \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}.$$

lygtį.